

Departamento de Ingeniería Térmica y de Fluidos

PROYECTO FIN DE CARRERA



SIMULACIÓN NUMÉRICA DE CONVECCIÓN NATURAL EN RÉGIMEN TURBULENTO

Autor: Ángel Manuel Santamaría Gómez

Tutor: Inmaculada Iglesias Estradé

Leganés, noviembre de 2016

ÍNDICE

RESUMEN	4
GLOSARIO	5
1 INTRODUCCION	7
1.1 Explicación del fenómeno: convección natural	9
1.2 Aplicaciones industriales y presencia en la naturaleza	11
1.3 Estado del arte	15
2 OBJETIVOS Y MOTIVACIÓN DEL PROYECTO	26
3 ANÁLISIS FÍSICO DEL PROBLEMA	28
3.1 Modelo matemático	13
3.1.1 Régimen laminar	32
3.1.2 Régimen turbulento	40
4 Análisis dimensional	42
4.1 Semejanza física	42
4.2 Adimensionalización del problema	44
4.3 Órdenes de magnitud	48

5	SIMULACIÓN NUMÉRICA	52
5.1	Depósito cilíndrico	52
5.1.1	Sección media axilsimétrica del cilindro	64
5.2	Cavidad rectangular altamente esbelta	72
5.2.1	Cavidad rectangular, $Ra = 0.86 \times 10^6$	72
5.2.2	Cavidad rectangular, $Ra = 1.43 \times 10^6$	102
5.3	Cavidad confinada entre cilindros coaxiales	110
5.3.1	Cavidad confinada entre cilindros coaxiales, $Ra = 0.86 \times 10^6$. Cilindro interior caliente	112
5.3.2	Cavidad confinada entre cilindros coaxiales, $Ra = 0.86 \times 10^6$. Cilindro interior frío	119
5.3.3	Cavidad confinada entre cilindros coaxiales, $Ra = 1.43 \times 10^6$. Cilindro interior caliente	124
6	CONCLUSIONES	127
7	REFERENCIAS	130
	ANEXO I	133

RESUMEN

El presente trabajo estudia la convección Rayleigh-Bénard en cavidades cilíndricas y rectangulares. Su principal objetivo es dotar de un problema de estas características, asequible de simular y de estudiar por cualquier persona sin avanzados conocimientos, tanto del mecanismo como de la herramienta de simulación.

Primero se estudia el fenómeno en un entorno cilíndrico, calentado desde abajo y para números de Rayleigh tanto dentro de régimen laminar como turbulento.

Se verifica que los cambios de temperatura tratados no afectan significativamente en la variación de las propiedades del fluido, por lo que, en vez de estudiar un flujo compresible, se puede aproximar a uno incompresible pero teniendo en cuenta que, al ser transferencia de calor, se debe resolver siempre la ecuación de la energía.

Se descubre una gran dependencia con la geometría y, sobre todo, la pared vertical del cilindro.

Se comprueba que este fenómeno tiene un carácter fuertemente dependiente con el tiempo debido a la complejidad y alta tridimensionalidad del flujo. Además, el tiempo que tarda la herramienta en proporcionar las primeras aproximaciones es muy alto.

Ante la imposibilidad obtener simulaciones para números de Rayleigh dentro del régimen turbulento, se desecha este experimento.

Seguidamente, se simula la convección Rayleigh-Bénard en una cavidad rectangular esbelta con el gradiente de temperaturas entre las paredes verticales. Para este caso, se consiguieron resultados muy precisos en poco tiempo.

Se estudia la dependencia de la malla y su refinamiento. También se analizan y comparan los resultados empleando varios modelos de turbulencia de dos y cuatro ecuaciones, standard k-e, realizable k-e, RNG k-e, standard k-w, SST k-w y Transitional SST.

Con este estudio, se pretende fijar qué modelo de dos ecuaciones es más preciso y adecuado de emplear. El modelo de cuatro ecuaciones se ejecuta como modelo de prueba, es decir, se esperan obtener a priori mejores resultados con los otros modelos.

En última instancia, y dado los resultados obtenidos, se simula un tercer entorno. Se trata de una cavidad confinada entre dos cilindros coaxiales concéntricos con sus paredes laterales calentadas a diferente temperatura. Con este problema, se pretende retomar la cavidad cilíndrica, pero bajo las condiciones del entorno bidimensional. Los resultados satisfactorios determinan que, bajo estas condiciones, la herramienta ofrece resultados muy precisos en poco tiempo. No obstante, se requiere la modelación de una malla muy adaptada al problema.

Por último, se determina que el mejor modelo de turbulencia de dos ecuaciones a emplear es el modelo standard k-w, pues proporciona buenos resultados en todas las regiones sin necesidad de refinar la malla.

GLOSARIO

RB	fenómeno de convección natural de Rayleigh-Bénard
Br	número de Brinkmann, $\frac{v^2 \mu}{\kappa(T_H - T_C)}$
B	profundidad de la cavidad rectangular
C_p	calor específico a presión constante (J/kg·K)
D	diámetro de la base de la cavidad cilíndrica (m)
g	aceleración de la gravedad (m/s ²)
$\overrightarrow{f_m}$	fuerzas másicas (N/m ³)
H	altura, dimensión vertical de la cavidad (m)
h	coeficiente de convección (W/m ² ·K)
k	conductividad térmica (W/m·K)
N	número de nodos de malla
Nu	número de Nusselt, $h \cdot H / k$
P	presión (N/m ²)
Pr	número de Prandtl, ν / α
\dot{q}	flujo de calor convectivo
Q_r	calor generado por radiación
Q_q	calor generado por reacción química
R	radio, dimensión radial de la cavidad (m)
Ra	número de Rayleigh, $Ra = g \cdot \beta \cdot \Delta T \cdot H^3 / \nu \cdot \alpha$
Ra_c	Rayleigh crítico, valor que indica la frontera entre régimen laminar y turbulento
t	tiempo (s)
T	temperatura (K)
u, v, w	componentes de la velocidad (m/s)
W	ancho de la cavidad rectangular
r, ϑ, z	coordenadas cilíndricas (m, rad, m)
x, y, z	coordenadas cartesianas (m)

letras griegas

Γ	relación de aspecto, D/H
Φ_v	ecuación de disipación viscosa de Rayleigh
α	difusividad térmica (m^2/s)
β	coeficiente de expansión térmica (K^{-1})
Δ	incremento
μ	viscosidad dinámica ($\text{kg}/\text{m}\cdot\text{s}$)
ν	viscosidad cinemática (m^2/s)
ρ	densidad (kg/m^3)
τ	tensor de esfuerzos

sobreíndices, subíndices y operadores matemáticos

*	unidades adimensionales
∇	operador nabla, gradiente
C	referente a la placa fría
H	referente a la placa caliente

1. INTRODUCCIÓN

El objetivo de este proyecto es simular la transferencia de calor convectiva natural que tiene lugar en una cavidad cuando se aplica sobre él una diferencia de temperaturas.

La transferencia de calor es el proceso de propagación del calor a través de distintos medios. Para que este proceso de intercambio tenga lugar, debe haber un gradiente térmico, ya sea dentro de un mismo sistema o entre varios sistemas puestos en contacto. Es decir, debe existir una diferencia de temperaturas que originará una transferencia térmica hasta alcanzar el equilibrio. Este intercambio de calor puede producirse mediante tres posibles modos, combinados o por sí solos:

- **Conducción:** se produce a través de un medio material por contacto directo entre sus partículas. Es gracias al movimiento de sus micropartículas que el calor se desplaza a lo largo del medio físico (sólido, líquido o gas). Matemáticamente se puede explicar por medio de la *ley de Fourier*, que dictamina la cantidad de calor transferida y afirma que la velocidad de conducción a través de un cuerpo por unidad de área transversal es proporcional al gradiente térmico existente.
- **Radiación:** atribuible a cambios en las configuraciones electrónicas de los átomos, sería el calor emitido por un medio o cuerpo debido a su temperatura. La intensidad de esta radiación depende de la temperatura y de la longitud de onda, siendo la correspondiente a la transferencia calorífica la comprendida entre el rango de longitudes de $0.1 \mu\text{m}$ a $1000 \mu\text{m}$ (región infrarroja del espectro). Todas las superficies con temperatura finita emiten energía en forma de ondas electromagnéticas. Este fenómeno está representado por la *ley de Stefan-Boltzmann*, que indica el calor emitido por una superficie por unidad de tiempo.
- **Convección:** se produce por medio de un fluido (líquido o gas) que transporta el calor entre zonas de diferente temperatura. Para que se produzca convección debe haber, por tanto, un transporte mecánico de masa además de una diferencia de temperaturas, es decir, es el transporte de calor por medio del movimiento de un fluido. Esta transmisión se compone de dos mecanismos: la transferencia de calor por conducción debida al movimiento molecular más la transferencia de energía que produce el movimiento del fluido debido a una fuerza externa, ya sea natural o forzada. Los movimientos macroscópicos de fracciones del fluido se imponen sobre los microscópicos (debidos a la conducción) de forma que la convección está predominantemente regida por la transferencia de energía en modo de intercambio térmico. Mediante la **ley de enfriamiento de Newton** se puede caracterizar el coeficiente convectivo h de transferencia de calor por convección,

$$\frac{dQ}{dt} = hA_s(T_s - T_{\text{inf}})$$

Donde,

h = coeficiente de convección
 A = área del cuerpo en contacto con el fluido
 T_s = temperatura en la superficie del cuerpo
 T_{inf} = temperatura del fluido lejos del cuerpo

Figura 1. Ley de enfriamiento de Newton para el calor transferido por convección

En este trabajo se estudiará únicamente la modalidad de **convección natural o libre** dentro de la transferencia de calor por convección. Este mecanismo de transporte de calor se diferencia porque no hay ninguna fuente exterior (refiriéndose a acción forzada, como una bomba o corriente de aire impuesta) que origine el movimiento del fluido. Este flujo está ocasionado, principalmente, bajo dos condiciones:

- ✓ Fluidos con carga eléctrica sometidos a la acción de un campo eléctrico o magnético.
- ✓ Fluidos con una diferencia de densidades dentro del mismo y bajo la presencia de un campo gravitatorio. Esta variación de densidades puede deberse, a su vez, a gradientes de concentración dentro del fluido o a gradientes de temperatura.



Figura 2. Fenómeno de convección libre manifestado en capas de tierra con distinta concentración de sales. Se aprecia el patrón ligeramente hexagonal de las parcelas.

En el presente estudio nos centraremos en esta última condición, donde el flujo está originado por gradientes de temperatura que provocan variaciones de densidad y por la acción de la gravedad.

1.1. Explicación del fenómeno: convección natural

Para empezar, el fluido presenta diferencia de temperaturas entre sus partes. Puede ser un fluido con distintas temperaturas o un fluido a cierta temperatura en contacto con otro material a distinta temperatura.

Debido a este gradiente, existirá un intercambio de calor o trabajo entre sus moléculas intentando alcanzar el equilibrio térmico. Las zonas de mayor temperatura cederán calor a las que presenten una temperatura menor, absorbiendo éstas el calor transmitido. La cesión de calor provoca que las moléculas emisoras se desaceleren, disminuyendo su temperatura y aumentando su densidad; mientras que la absorción de calor origina una aceleración de las moléculas receptoras, aumentando su temperatura y disminuyendo la densidad (cambios microscópicos).

Esto último puede explicarse también mediante las relaciones entre magnitudes físicas de la materia que se han obtenido empíricamente a lo largo de años de investigación (en particular, por ejemplo, la Ecuación General de los Gases Ideales). Estas relaciones dictaminan que, en concreto, la densidad aumenta directamente con la presión a temperatura constante y, el caso que nos ocupa, que la densidad disminuye inversamente al aumento de temperatura a presión constante.

$$P \cdot \frac{m}{\rho} = n \cdot R \cdot T$$

Figura 2. Ecuación de estado de los gases ideales, desglosando V como $V = \frac{m}{\rho}$ para poder apreciar que densidad y temperatura son inversamente proporcionales.

Por tanto, como ya se ha visto, la densidad de un fluido disminuye con el incremento de temperaturas. Si el fluido se encuentra bajo la acción de un campo gravitacional, dichas diferencias de densidad dentro del fluido originan fuerzas de flotación o efectos Buoyancy, que generan el movimiento del fluido y, por ende, el flujo.

Las fuerzas de flotabilidad son unas fuerzas de empuje en dirección hacia arriba ejercidas por un fluido que se antepone al peso de otro fluido u objeto inmerso en él. La primera ley que estudió este fenómeno es el Principio de Arquímedes, sobre el que se basan todos los estudios posteriores. En una columna de fluido, las diferencias de presión que existen entre las distintas alturas (la presión se incrementa proporcionalmente a la profundidad debido al peso de las capas de fluido que quedan por encima) resultan en una fuerza de empuje en dirección ascendente cuya magnitud es proporcional a esa diferencia de presiones y es equivalente al peso del fluido desplazado por el volumen del objeto o del otro fluido. Si en el sistema existen puntos de distinta densidad (ya sea otro material o el mismo fluido con distintas propiedades), esta fuerza actuará sobre ellos originando que el objeto suba y flote, si su densidad es menor que la del fluido, o que se hunda si la densidad es mayor.

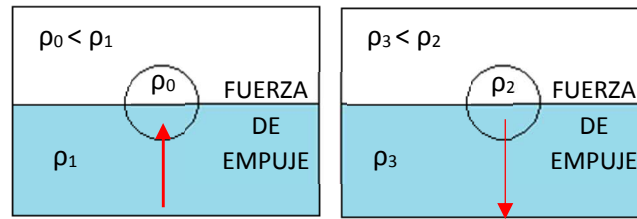


Figura 3. Efectos de flotabilidad entre dos cuerpos, uno sólido y otro fluido, con distinta densidad.

Así pues, volviendo al estudio, las fuerzas de flotación provocan que el fluido más caliente y, consecuentemente, más liviano tienda a elevarse ocupando los niveles más altos de la vertical; mientras que el fluido más frío y pesado tiende a bajar ocupando la posición original del fluido más caliente (cambios macroscópicos). Si el fluido frío es expuesto de nuevo a un intercambio térmico, éste se calentará y el proceso descrito continuará, produciendo una corriente convectiva que transferirá energía en forma de calor desde la parte más baja a la parte más elevada. Este fenómeno es el que tiene lugar, por ejemplo, en la creación de los vientos de la Tierra, en el ciclo del agua o en una cacerola con agua hirviendo.



Figura 4. Flujo convectivo del agua en una cacerola con su base expuesta a temperatura constante T .

Por tanto, se observa que la fuerza de accionamiento o impulsora que pone en marcha todo el sistema es la flotabilidad, resultado de la diferencia de densidad del fluido sumado a la existencia de una aceleración. Esta aceleración puede deberse a la presencia de un campo gravitacional o a la actuación de una fuerza centrífuga o efectos de Coriolis. Se debe subrayar que, tanto sin aceleración como sin diferencia de densidades, la convección natural no podría tener lugar. Ambos son necesarios y complementarios en este mecanismo de transferencia de calor.

Estos movimientos en el seno del fluido constituyen el **flujo convectivo**, generado, como ya se ha indicado, por la estratificación inestable de la densidad en dirección vertical asociada a gradientes de temperatura. Si el fluido se encuentra confinado dentro de un espacio limitado, se constituye el fenómeno conocido como **convección natural de Rayleigh-Bénard**, y se trata del caso más simple y común de convección natural que toma lugar en el mundo conocido.

1.2. Aplicaciones industriales y presencia en la naturaleza

La convección natural siempre ha atraído la mirada de multitud de investigadores debido a su presencia tanto en la industria como en la naturaleza, pues se trata de un mecanismo de transporte de calor muy efectivo.

Respecto a la naturaleza, este fenómeno está muy presente en la atmósfera, donde involucra la transferencia de grandes cantidades de calor mediante dos agentes principales, agua y aire. Así, por ejemplo, está fuertemente presente en la formación de nubes comunes y de nubes de gran desarrollo vertical (cúmulos congestus y cumulonimbos), típicas portadoras de tormentas eléctricas y grandes precipitaciones, como consecuencia de su efecto en el ciclo hidrológico. Cuando el vapor de agua ascendente a la atmósfera, pierde calor y se condensa, se forman las nubes. Éstas alcanzan grandes dimensiones si la condensación ocurre rápidamente debido al flujo convectivo ascendente dentro de la masa de nubes acaecido por la diferencia de temperaturas en su interior.

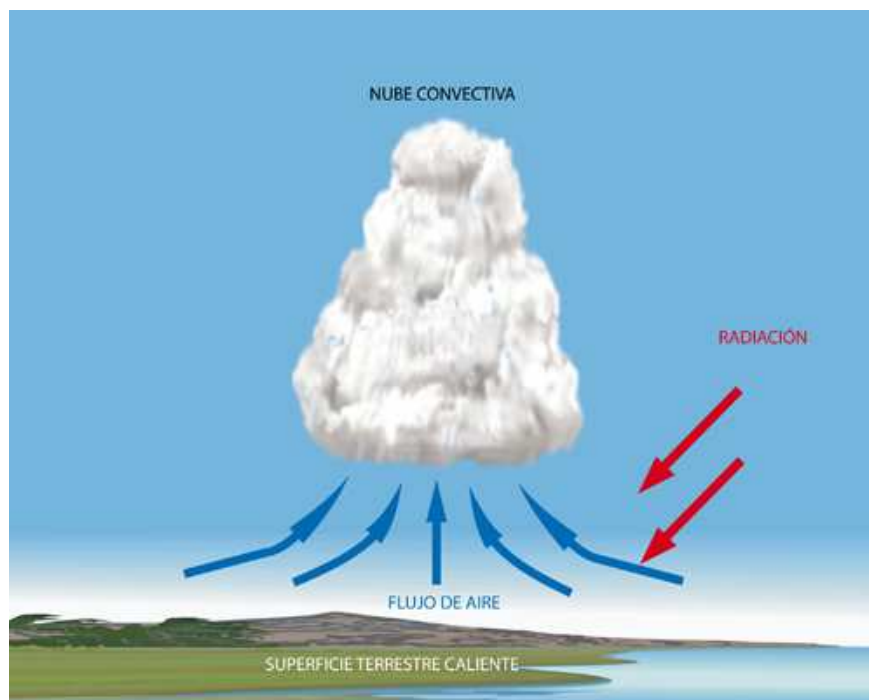


Figura 5. Nube convectiva de gran proyección vertical formada por convección natural cuando la capa de aire caliente situada en la superficie terrestre asciende mientras ve disminuida su temperatura drásticamente.

Su influencia, además, es relevante en las corrientes oceanográficas y su proceso de mezclado, ligado, de nuevo, a las distintas temperaturas o a una diferente concentración de sales. También influye en la creación de vientos marítimos, ciclones o anticiclones, así como en los vientos geostróficos de la atmósfera, debido a la presencia de corrientes de aire (o agua) a distinta temperatura y a distintos niveles.

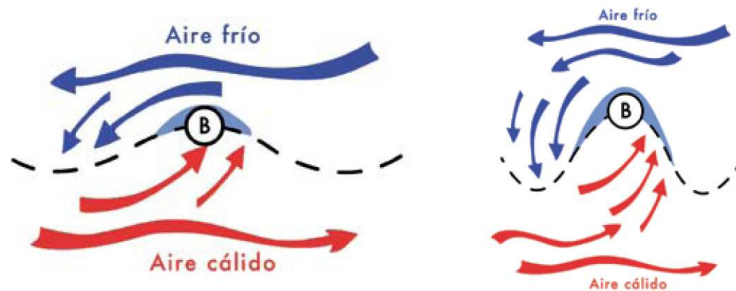


Figura 6. Ciclón generado alrededor de B debido a dos corrientes de aire a distintas temperaturas. La velocidad del ciclón dependerá de la corriente de viento frío. Este mismo mecanismo es el causante de la generación de vientos o de olas en las superficies oceanográficas.

Pero no sólo se limita al agua y el aire. También es importante su relación con la dinámica de los materiales del manto terrestre y su influencia en el movimiento de las placas tectónicas.

De hecho, la fuerza de accionamiento del movimiento de estas placas es la convección existente dentro del manto como resultado del gradiente térmico entre las capas más superficiales y las más profundas (más calientes y, por tanto, más livianas). Esto crea dos tipos de inestabilidades. Por un lado, regiones del manto profundo ascienden provocando que zonas inestables de la litosfera (capas más superficiales) desciendan en dirección al núcleo. Por otro lado, se origina la succión de las placas tectónicas oceánicas (que constituyen la última capa límite térmica del manto) dentro del manto hacia la capa primaria núcleo-manto. La convección del manto ocurre a un ritmo de centímetros por año y toma alrededor de cientos de millones de años completar el ciclo.



Figura 7. Ciclo de convección del manto terrestre. Regiones calientes del manto profundo ascienden, empujando las placas tectónicas y provocando su succión hacia el núcleo. En los puntos de empuje pueden provocarse erupciones volcánicas además de los terremotos que se puedan originar por la tracción de las placas.

Gracias a este proceso es por el que las placas tectónicas pueden moverse alrededor del núcleo distancias relativamente grandes, evitando un cataclismo al conservar toda esa energía. No obstante, también es causante directo de algunas erupciones volcánicas debido a efectos de flotabilidad aplicados sobre porciones parcialmente fundidas del manto que tienden a ascender debido al descenso de su densidad.

Incluso está presente en la columna de humo y aire caliente ascendente originada por el fuego. Gracias al estudio de la convección natural, se puede prever el movimiento de la corteza terrestre, así como desarrollar nuevos medios de prevención y extinción de incendios.

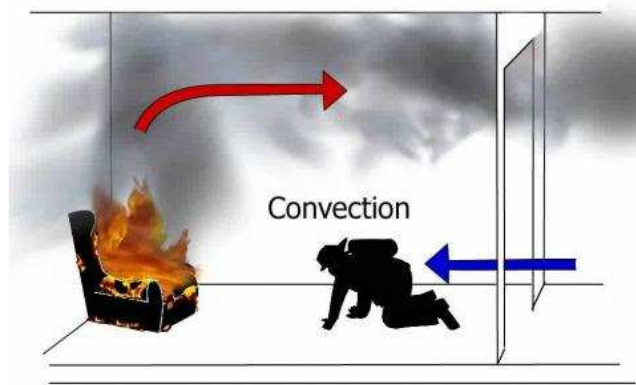


Figura 8. En caso de incendio, una premisa muy importante es intentar agacharse todo lo posible (incluso durante el movimiento), pues la convección causa que el humo (aire caliente) ascienda mientras que el aire frío (y limpio) ocupa los niveles más bajos.

En cuanto a las aplicaciones ingenieriles, estas son numerosas y de múltiples naturalezas. Tiene un importante papel en la energía solar, donde se emplea la convección natural en el diseño de convertidores solares para minimizar las pérdidas energéticas.

También es relevante este tipo de convección en procesos de disipación calorífica, como el flujo convectivo alrededor de aletas disipativas de calor o el enfriamiento mediante corrientes de aire sin ayuda de ventiladores. Esto último puede implementarse a pequeña escala (electrónica, informática) o a gran escala (ventilación, calefacción y enfriamiento de edificios o de procesos industriales específicos), donde un factor muy importante es la capacidad del fenómeno de mantener una temperatura constante.

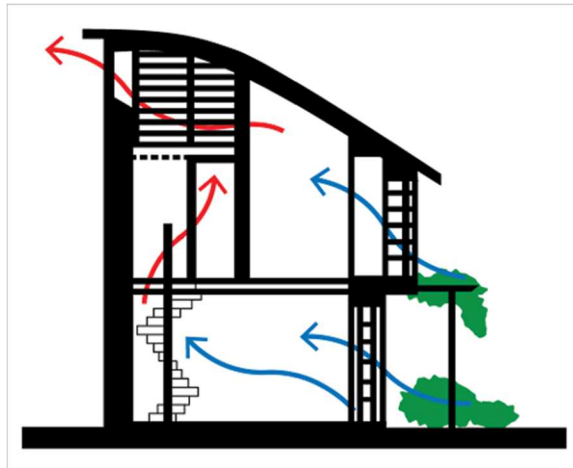


Figura 9. Sencillo esquema de ventilación de un hogar mediante convección natural. El aire frío entra en la casa, empujando al aire caliente hacia fuera (normalmente se emplea una chimenea de ventilación), creando una corriente de ventilación que se renueva periódicamente.

Otra aplicación muy curiosa en la industria es el empleo de este tipo de transferencia calorífica para entender y desarrollar microestructuras durante el enfriamiento de metales fundidos (celdas convectivas).

En relación a todo esto, es destacable el papel que desempeña la dinámica computacional y la simulación de sus resultados para comprender y estudiar las dinámicas de flujo y las distintas topologías que se generan debido a la transferencia de calor convectiva. Así, datos que anteriormente habían pasado inadvertidos debido a la complejidad de su obtención o a su corto período de presencia en el tiempo, han podido observarse y estudiarse convenientemente. De este modo, se han recopilado multitud de topologías distintas, así como diversos procesos transitorios en los que tienen lugar cambios en la estructura del flujo, los cuales pueden ser más o menos estables. Quizás el punto más relevante, es la relación directa que existe entre estas posibles estructuras y la capacidad mayor o menor que tiene el flujo de transferir calor a distintas regiones del mismo o a otro objeto o fluido.

1.3. Estado del arte

Esta simulación está basada en estudios y experimentos previos llevados a cabo por diversos científicos. Entre ellos, podemos mencionar las siguientes contribuciones.

❖ Experimento de Rayleigh-Bénard.

Los primeros experimentos cuantitativos sobre convección fueron realizados por **Henri Bénard** [5] alrededor de 1900. Estos experimentos consistían en una fina capa de fluido horizontal (espermaceti o grasa de ballena) que estaba expuesta al aire ambiente y sometida a un gradiente de temperaturas vertical (calentada constantemente desde abajo). Bénard estudió tanto la estabilidad de esta capa como las formas geométricas que adquiría bajo estas condiciones.

El científico observó como en el fluido se originaba un flujo convectivo que, tras un régimen transitorio inicial, creaba patrones semiregulares y semiestables en forma de celdillas hexagonales (parecido a una colmena).



Fig. 10.A

Figura 10.A. Patrón de celdas hexagonales presente en un recipiente con espermaceti cuando es calentado desde abajo.



Fig.10.B

Figura 10.B. Una de las fotografías originales de Bénard del característico patrón que aparecía en el fluido al ser calentado desde abajo mientras se mantenía la otra superficie en contacto con el ambiente.

Comprobó que el flujo ascendente se localizaba en los centros de las celdillas, mientras que el flujo descendente creaba el perímetro de las mismas. Además, visualizó pequeñas depresiones de la capa superficial libre del fluido en el centro de cada patrón, lo que le llevó a especular acerca del papel que jugaba la tensión superficial.

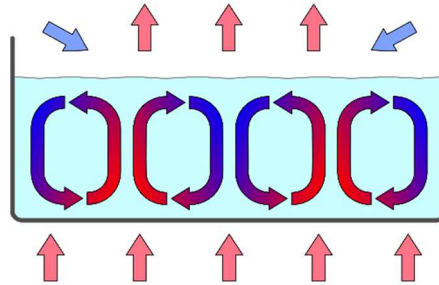


Fig.11.A

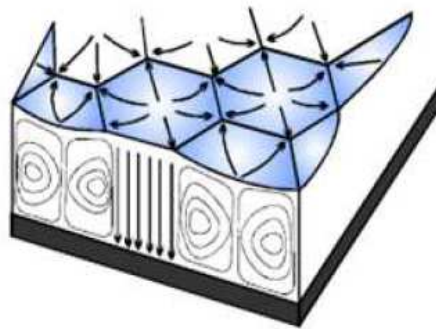


Fig.11.B

Figura 11. Celdas convectivas bajo un campo gravitacional. Dentro de las celdas se produce una recirculación de fluido mientras el fluido caliente asciende por el eje central y el fluido frío desciende por el contorno de la celda. En la Fig. 11.B se puede observar la ligera depresión que aparece en el centro de las celdas.

Consiguió, además, hacer mediciones acerca de la relación de aspecto de las celdillas y su dependencia con la geometría alcanzada, el flujo de calor y su temperatura; así como determinar con bastante precisión la periodicidad de los patrones. Descubrió también que había una temperatura crítica (o más bien, diferencia de temperaturas crítica) por debajo de la cual no ocurría convección alguna.

Unos años más tarde, en 1916, **Lord Rayleigh** publicó su artículo "*On Convection Currents in a horizontal layer of fluid, when the higher temperature is under side*" [46], donde continuaba con el estudio de la convección natural y los mecanismos físicos que tomaban lugar en ella, consiguiendo reunir todos por primera vez en un mismo corolario. Postuló y explicó claramente como el flujo convectivo estaba causado por las fuerzas de flotabilidad y la densidad no uniforme del flujo, teniendo como fuerzas de resistencia o atenuadoras la fricción y la conducción de calor. La primera es la fuerza que hay que vencer en primera instancia para poner en movimiento el flujo, mientras que la segunda tiende a homogeneizar la temperatura y, por tanto, la densidad del fluido, siendo ambas dependientes de parámetros característicos del fluido de trabajo, viscosidad y difusividad térmica respectivamente. De este modo fijó teóricamente una diferencia crítica de temperaturas en función de la altura de la capa de fluido por debajo de la cual no se producía este flujo.

Gracias a que consiguió distinguir a casi todos los agentes involucrados, pudo desarrollar dos situaciones de equilibrio que se daban en un sistema inicialmente en reposo con una distribución creciente de densidades en dirección ascendente ante perturbaciones externas. Dependiendo de la importancia relativa de los mecanismos mencionados anteriormente (flotabilidad, fricción y conducción de calor), encontró, por un lado, una situación de equilibrio estable en la que el fluido vuelve a su estado de reposo y, por otro lado, un equilibrio inestable cuando se mantiene en movimiento originando el flujo convectivo y, por tanto, la convección natural.

Aunque en un principio se producían discrepancias entre los resultados teóricos y los experimentales de Bénard, investigaciones posteriores hicieron válida la teoría de Rayleigh cuando no se tienen en cuenta o se desprecian los efectos de la tensión superficial de la capa libre del fluido, presente en los experimentos del primero. Así pues, en el estudio de un flujo convectivo confinado entre dos placas perfectamente conductoras, sin la presencia de tensiones en el fluido y con velocidad nula alrededor de las paredes, son aplicables los descubrimientos de Rayleigh, conformando el fenómeno denominado como “**convección de Rayleigh-Bénard**”.

Para esta configuración, Rayleigh linealizó en torno a la situación de equilibrio las ecuaciones de Navier-Stokes, pues estaba interesado en estudiar la estabilidad de las pequeñas perturbaciones que se creaban. Desarrollando el sistema lineal resultante, descubrió el parámetro adimensional que lleva su nombre, *el número de Rayleigh*.

$$Ra = \frac{g \cdot H^3 \cdot \beta \cdot \Delta T}{\vartheta \cdot \alpha}$$

Donde,

g = aceleración de la gravedad
 H = espesor de la capa fluida
 β = coef. de dilatación térmica
 ϑ = viscosidad cinemática
 α = difusividad térmica
 ΔT = diferencia de temperatura entre placas

Figura 12. Número adimensional de Rayleigh y parámetros que lo conforman.

El número de Rayleigh mide la importancia relativa de los efectos de flotabilidad, viscosidad y conducción térmica. Existe un valor crítico a partir del cual el sistema se vuelve inestable y aparece el flujo convectivo y, por tanto, las celdas convectivas. De este modo, Rayleigh obtuvo el valor para el Ra crítico del caso más simple, dos superficies libres, fijándolo en $Ra_c = 657,51$.

Este tipo de convección será sobre la que trate el presente trabajo, que es la que se debe enteramente al gradiente de temperaturas presente en el sistema, con la temperatura máxima localizada en la placa inferior.

❖ Convección de Bénard-Marangoni.

Pearson replanteó el problema centrándose en los efectos provocados por la tensión superficial. Este flujo se origina cuando el fluido es calentado desde la base inferior y presenta su superficie superior abierta al ambiente, donde el efecto térmico de Marangoni juega un importante papel, como años antes había observado, sin saber, Bénard. El fenómeno también se conoce como **convección termocapilar**.

La variación de temperatura en la superficie induce unas tensiones tangenciales que pueden verse incrementadas debido al flujo convectivo caliente que procede del interior del fluido. De este modo, el efecto que tiene la tensión superficial es crear una depresión en el lugar donde el fluido tiende a subir debido a las fuerzas de flotabilidad.

Si, además, tenemos en cuenta que el sistema presenta asimetría entre las condiciones de las dos placas, lo que conlleva la presencia de la geometría hexagonal, tenemos el fenómeno observado por Bénard completamente explicado. Las fuerzas de flotabilidad serán dominantes en las capas de mayor espesor del volumen, mientras que la tensión superficial lo será en las más delgadas. Se puede encontrar una condición específica en la que los dos efectos se compensan uno al otro.

❖ Avances a lo largo del Siglo XX:

Numerosos investigadores han continuado estudiando y analizando este tema, aportando cada vez más datos y conocimiento acerca del flujo convectivo natural. Algunos estudios generalistas han ayudado a comprender mejor la convección RB, como los experimentos de **Prandtl** (1932), quien postuló que el transporte de calor entre una superficie y el fluido que lo rodea (a diferente temperatura) depende fuertemente del campo fluido alrededor del muro.

Son numerosos los investigadores que han determinado el valor crítico del número de Rayleigh para multitud de condiciones y geometrías particulares. El primero en llevarlo a cabo fue **Jeffreys** [32], que en 1926 determinó este valor para el caso de dos placas infinitas ($Ra_c = 1708$). Posteriores análisis han demostrado que este valor crítico puede aplicarse también en el caso de dos placas perfectamente conductoras si la relación de aspecto Γ es suficientemente pequeña. Para el caso de placa inferior caliente y superficie superior libre, este valor se ha determinado como $Ra_c = 1100,65$.

Años más tarde, **Davis** (1967) [24], **Catton** (1970,1972) [10, 11, 12], **Heitz y Westwater** (1971) [27] y **Stork y Müller** (1972) [51] mostraron resultados teóricos y experimentales de valores de números de Ra_c para diferentes geometrías con diferentes conductividades de las paredes laterales.

Por otro lado, **Batchelor** en su obra *“Heat convection and Buoyancy effects in fluids”* (1954) [4], llegó a la conclusión de que la solución al problema de la convección natural dependía de tres parámetros adimensionales independientes, la relación de aspecto de la cavidad, $\Gamma = H/R$; el número de Prandtl, $Pr = \nu/\alpha$, que caracteriza las propiedades físicas del fluido; y el número de Rayleigh, $Ra = g \cdot H^3 \cdot \beta \cdot \Delta T / (\nu \cdot \alpha)$, que relaciona las fuerzas de flotación (Buoyancy) con las fuerzas viscosas y la difusividad térmica.

Otros trabajos han centrado su estudio en la determinación del número de Nusselt con el fin de caracterizar la transferencia de calor en el sistema.

Por otro lado, el efecto de la variación de las propiedades físicas con la temperatura en la convección natural ha sido ampliamente estudiada. Con el fin de crear un criterio para considerar válida la aproximación de Boussinesq, **Gray y Giorgini** (1976) [26] fijaron una variación máxima del 10% de las propiedades físicas entre las placas isotérmicas. En su trabajo reportaron para una temperatura media de 15°C que la diferencia de temperatura máxima en el agua podría ser de 1.25°C y para aire de 28.6°C con el fin de no sobrepasar una variación del 10% en el coeficiente de expansión térmica y la densidad, respectivamente.

Otros estudios, considerando propiedades físicas variables, se enfocan en grandes variaciones de viscosidad del fluido, refiriéndose principalmente a simulaciones numéricas de la convección en el manto terrestre (**Solomatov** (1995) [50], **Moresi y Solomatov** (1995) [37], **Trompert y Hansen** (1998) [52] y **Manga et al.** (2001) [35]). En estas condiciones, las diferencias de viscosidad dentro del fluido son suficientemente grandes como para producir una capa de fluido estática cerca de la pared fría superior de la cavidad, y por lo tanto con un valor elevado de viscosidad, a través de la cual la transferencia de calor se produce solo por conducción.

❖ Estudios en cavidades tridimensionales:

Muchos investigadores se han centrado en estudiar el comportamiento del flujo dentro de cavidades tridimensionales para diferentes valores de sus números adimensionales. Los cálculos numéricos por ordenador y la dinámica computacional han jugado un papel muy importante en este campo, siendo necesaria su utilización para poder desarrollar conclusiones sólidas y validar las suposiciones aplicadas en los cálculos numéricos, de alta complejidad para casos relativamente simples.

Aziz y Hellmuns (1967) [2] estudiaron por primera vez la convección RB en el interior de una cavidad cúbica. Simularon numéricamente el movimiento convectivo en el interior de una cavidad con paredes laterales adiabáticas y con número de Ra próximo al crítico ($Ra=3.5 \times 10^3$, $Pr=1$). Los resultados indicaron la existencia de una circulación en forma de rollo con eje orientado perpendicularmente a dos aristas verticales de la cavidad diagonalmente opuestas. Posteriormente, **Ozoe** (1977) [41] retomó sus cálculos y, mediante un código mejorado, encontró dos configuraciones de flujo estable, circulación diagonal y circulación de rollo simple con el eje orientado perpendicularmente a dos paredes laterales opuestas.

Hernández y Frederik (1994) [28] emplearon un código con formulación de volúmenes finitos de segundo orden en cavidad cúbica con paredes laterales adiabáticas para encontrar una nueva estructura de flujo a $Ra = 8 \times 10^3$ y $Pr = 0.71$, ya observada experimentalmente por **Stork y Müller** (1972) [51]. Esta nueva circulación consistía en un rollo de forma toroidal que presentaba una corriente ascendente a lo largo del eje vertical de simetría de la cavidad y corrientes descendentes fluyendo paralelas a las cuatro paredes laterales.

Kim y Viskanta (1984) [33] demostraron que omitir la interacción entre la convección dentro de la cavidad y la conducción en las paredes, empleando condiciones de contorno ideales, no constituye una buena aproximación, pues esta conducción es un fenómeno inevitable.

Dentro de los últimos trabajos en cavidades cúbicas se encuentran los de **Pallarés et al.** (1996) [42], que caracterizaron las topologías de flujo y la transferencia de calor de cuatro estructuras de flujo en régimen laminar y estacionario. Las cuatro estructuras eran estables en el rango $Ra \in [3.5 \times 10^3, 10^4]$ y $Pr = 0.71$. Pallarés et al. (2001) [43] encontraron experimentalmente una gama de 7 estructuras de flujo para Ra moderados ($Ra < 8 \times 10^4$) y $Pr = 130$, comprobando que estos resultados concordaban de manera acertada con simulaciones computacionales. Por último, Pallarés et al. (2002) [44] encontraron que a $Ra = 10^6$ y $Ra = 10^8$ y $Pr = 0.71$, en los que el flujo es turbulento, los campos de velocidad y temperaturas instantáneas presentaban grandes fluctuaciones con respecto a los valores promedio de los mismos e identificaron en el campo de velocidades promedio temporal dos estructuras toroidales cercanas a las paredes horizontales.

Siguiendo los trabajos de Pallarés et al. [42, 43, 44], se engloban los resultados de **Valencia** (2005) [53], quien estudió agua dentro de una cavidad cúbica con paredes conductoras. Mediante técnicas experimentales y numéricas, desarrolló topologías de flujo, la transferencia de calor y los campos de temperatura y velocidad para régimen laminar ($Ra = 10^4$ y $Ra = 5 \times 10^4$) y turbulento ($Ra = 10^7$ y $Ra = 10^8$). Comprobó que la condición de Gray y Giorgini [26] de que las propiedades físicas no presenten variaciones mayores del 10% es excesivamente restrictiva. Valencia encontró que, para variaciones de hasta el 60% del coeficiente de expansión térmica y del 40% para la viscosidad, la topología general de las estructuras más estables en estado estacionario para $Ra = 10^4$ y $Ra = 10^5$ no sufrían cambios significativos cuando se aplicaba la condición de Boussinesq. Para régimen turbulento ($Ra = 10^7$), concluyó que las medias temporales de la velocidad y de la temperatura, así como el Nusselt, no se ven significativamente afectadas por la dependencia de las propiedades físicas con la temperatura. En este régimen, diferenció dos estructuras; mientras que para $Ra = 10^7$ se aprecian dos rollos horizontales en forma de anillo cerca de las paredes caliente y fría, para números mayores ($Ra = 3 \times 10^7$, $Ra = 5 \times 10^7$, $Ra = 7 \times 10^7$ y $Ra = 10^8$) la estructura consiste en un rollo con eje horizontal orientado en dirección diagonal a dos vértices de la cavidad. La contribución de los términos de la ecuación de movimiento en la dirección vertical mostró ser prácticamente invariable para los casos estudiados, incluso dentro de la capa límite térmica y de velocidades donde la variación de las propiedades físicas con la temperatura es más importante.

Por último, se menciona el estudio llevado a cabo por **Betts y Bokhari** (2000) [6]. Estos autores analizaron el flujo turbulento que se produce en una cavidad cerrada rectangular muy esbelta. Las dimensiones de la cavidad eran $2.18 \times 0.076 \times 0.52$ m., con una diferencia de temperaturas aplicada entre platos laterales verticales de 19.6°C y 39.9°C , proporcionando unos números de Rayleigh basados en el ancho (0.076m.) de $Ra = 0.86 \times 10^6$ y $Ra = 1.43 \times 10^6$.

Bajo estas condiciones, el flujo en el núcleo de la cavidad es altamente turbulento y las variaciones de las propiedades con la temperatura son pequeñas.

Se midieron los campos de velocidad y temperatura media y turbulenta, así como sus variaciones dentro de la cavidad, junto a los flujos de calor y los esfuerzos turbulentos. Los

campos de velocidad y temperatura demostraron ser casi bidimensionales, excepto cerca de las paredes delantera y trasera, y antisimétrico a lo largo de la diagonal.

Sus resultados proporcionan un marco muy acertado para chequear y probar modelos de turbulencia para números de Re turbulentos bajos.

En cuanto a cavidades cilíndricas, también han sido objeto de un largo y profundo estudio, dada su importancia teórica y práctica. Las primeras investigaciones demostraron el papel crucial que tienen las inestabilidades del flujo en cómo se desarrollan los patrones convectivos. La inestabilidad del estado primario conductivo ha sido ampliamente establecida a partir de los trabajos de **Charlson y Sani** (1970, 1971) [14], **Stork y Müller** (1975) [51], **Rosenblat** (1982) [47] y **Buell y Catton** (1983) [9]. Todas estas investigaciones mostraron que la estructura del flujo después del umbral conductivo es independiente del número de Prandtl pero depende de la relación de aspecto. La transición entre los modos axilsimétrico y no axilsimétrico ocurre alrededor de la relación de aspecto $\Gamma = 1.1$ para paredes laterales adiabáticas. Se observó que el número crítico de Rayleigh decrecía asintóticamente hacia un valor constante para $\Gamma \rightarrow 0$.

La estabilidad del estado convectivo, dependiente tanto de la relación de aspecto como del Prandtl, ha sido ampliamente estudiada para el flujo primario axilsimétrico. La primera investigación numérica satisfactoria de este flujo, para relaciones de aspecto pequeñas, fue llevada a cabo por **Charlson y Sani** (1975) [15].

Müller, Neumann y Weber (1984) [38] investigaron flujos experimental y numéricamente para $Pr = 0.02$ y $Pr = 6.7$. Observaron un flujo axilsimétrico para $\Gamma = 1$ y no axilsimétrico para $2 < \Gamma < 10$. También encontraron numéricamente una segunda solución estable simétrica para $Ra = 2800$, que concuerda con los resultados reportados por **Neumann** (1990) [39].

Wanschura, Kuhlmann y Rath (1996) [55] llevaron a cabo un estudio numérico de las inestabilidades convectivas para relaciones de aspecto moderadas, $0.64 < \Gamma < 1.1$. El número de Prandtl se fijó en dos valores, $Pr = 0.02$ y $Pr = 1$. Comprobaron que el segundo transitorio convectivo se incrementaba con el número de Prandtl, y que también dependía fuertemente de la relación de aspecto. Concluyeron que el flujo axilsimétrico se vuelve inestable debido al mecanismo térmico para grandes números de Prandtl, mientras que para números pequeños el segundo transitorio es inercial por naturaleza. **Boronska y Tuckerman** (2010) [7,8] demostraron que este flujo axilsimétrico puede volverse inestable a partir de un $Ra = 7400$ y entrar en modo dependiente con el tiempo.

Lucas y Mullin (1999) [29] observaron experimentalmente cinco patrones estacionarios distintos bajo los parámetros fijos $\Gamma = 0.5$, $Pr = 6.7$ y $Ra = 1775$ y paredes adiabáticas. **Rüdiger y Feudel** (2000) [48] estudiaron numéricamente la formación de diferentes patrones como rollos rectos, toroidales y en forma de espiral para sistemas cilíndricos con $\Gamma = 0.25$ y $Pr = 1$. **Leong** (2002) [34] empleó el método de diferencias finitas para simular flujos convectivos con $Pr = 7$ en cilindros con relaciones $\Gamma = 0.25 \sim 0.5$ y muros laterales adiabáticos. Observó varios patrones estacionarios de rollos paralelos axilsimétricos, todos ellos estables dentro del rango $781 < Ra < 4688$.

Wang, Ma, Chen y Sun (2012) [54] han continuado con las investigaciones de Wanschura et al. (1996) [55] para estudiar la estabilidad del flujo axilsimétrico en posteriores

transitorios, siendo capaces de hallar un flujo axilimétrico para cierto rango de Pr y $\Gamma = 0.8, 0.9$ y 1 .

A partir de un conocimiento avanzado de los estados e inestabilidades transitorias que ocurren en el flujo, se han podido desarrollar entornos empíricos bajo determinadas condiciones, pero intentando buscar siempre un estado estacionario o axilimétrico. Numerosos estudios se han desarrollado para muestras entre $0 < \Gamma < 1$, intentando alcanzar números de Rayleigh lo más altos posible, pero manteniendo la pared lateral de los experimentos pequeña. En estos experimentos, la pared lateral vertical afecta fuertemente al flujo y da forma a una circulación a gran escala normalmente referida como flujo primario. **Grossmann y Lohse** (2011) [1] predijeron el flujo de calor global y la velocidad típica del movimiento convectivo como función de los parámetros Ra , Pr y Γ . Mientras que esta teoría ha sido probada como satisfactoria para predecir el comportamiento global a $\Gamma = 1$, sólo proporciona predicciones cualitativas para relaciones mayores.

Para relaciones de aspecto pequeñas del orden de la unidad, está ampliamente asumido que se desarrolla un rollo convectivo. Este rollo es el sujeto de una larga variedad de procesos dinámicos tales como rotaciones y cambios drásticos de dirección. Incrementando la relación de aspecto, el rollo convectivo se rompe en estructuras más pequeñas. **Niemela y Sreenivasan** (2006) [40] y **du Puits et al.** (2007) [18, 19] han investigado la estructura del flujo global analizando datos de temperatura y velocidad local. Hallaron claras evidencias de transitorios significativos y relacionaron estas transiciones con la evolución del flujo de una estructura a otra.

En un estudio numérico muy extenso, cubriendo relaciones de aspecto $0.5 < \Gamma < 12$ y números de Rayleigh $10^7 < Ra < 10^9$, **Bailon-Cuba et al.** (2010) [3] han ilustrado las variaciones del campo fluido global muy acertadamente, mostrando la transición desde un gran rollo convectivo hacia una estructura de multirollos. Estas transiciones estaban acompañadas por una variación del 10% en el número de Nusselt global.

Aunque se ha podido demostrar que cada topología de flujo lleva asociada un determinado flujo de calor, aún no está claro si las variaciones presentes en el flujo de calor se producen por efectos de capa límite o por las transiciones en la estructura. Para ello, se ha estudiado en detenimiento los campos de velocidad y temperatura dentro de las capas límites, aunque la mayoría de los trabajos experimentales se han centrado principalmente en relaciones comprendidas entre $0 < \Gamma < 1$.

Respecto al estudio de estas capas límite, hay que mencionar las aportaciones de **du Puits, R., Resagk, C. and Thess, A.** con sus trabajos "*Structure of viscous boundary layers in turbulent Rayleigh-Bénard convection*" (2009) [22] y "*Thermal boundary layers in turbulent Rayleigh-Bénard convection at aspect ratios between 1 and 9*" (2013) [23]. Estos autores reportaron precisas medidas de velocidad y temperatura para la región interior, así como en la capa límite presente en los platos, en un experimento RB a gran escala para varias relaciones de aspecto.

Como base experimental para dar solidez a sus análisis computacionales, emplearon, como ya se ha dicho, un experimento RB a gran escala. Se trata de una gran instalación construida en la universidad de Ilmenau, denominada "**Barril de Ilmenau**", para el estudio del flujo convectivo que tiene lugar en aire confinado en un depósito cilíndrico con un gradiente de temperaturas aplicado entre sus placas horizontales.

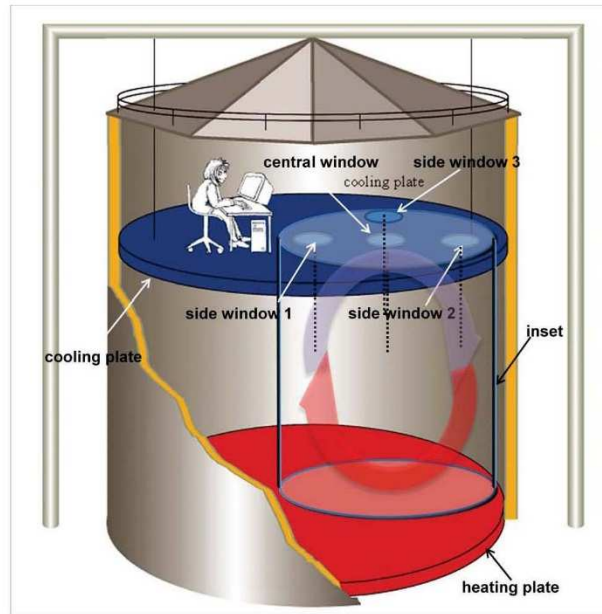


Figura 13. Esquema del experimento a gran escala “Barril de Ilmenau”

El depósito presenta un diámetro fijo $D = 7.15$ m y una altura H variable comprendida entre 0.79m y 6.30m. Gracias a esta característica, es posible jugar con el efecto de la relación de aspecto Γ sobre el flujo convectivo, cubriendo ratios entre $\Gamma = 1.13$ y $\Gamma = 9$.

El fluido de trabajo del experimento es aire en condiciones normales e inicialmente en reposo. Este aire presenta un $Pr = 0.7$, virtualmente independiente con la temperatura. El fluido está confinado dentro del tanque cilíndrico, entre sus placas inferior e superior, las cuales pueden ser mantenidas a una determinada temperatura constante cada una. La pared lateral puede suponerse adiabática.

Esta instalación dispone, además, de múltiples posibilidades a la hora de recopilar datos. Para ello, se emplean sensores que ofrecen datos de temperatura en numerosas regiones del flujo y avanzados sistemas de medida ópticos para recoger información del campo de velocidades además de la topología de flujo.

El equipo encontró que los perfiles medios de velocidad y temperatura en el eje central del experimento son invariantes con los cambios en la relación de aspecto. No obstante, no pudieron completar su estudio en todo el rango deseado de Γ porque las variaciones de éste llevan implícitos cambios en el número de Rayleigh.

En su primer trabajo, analizaron en profundidad el campo de velocidades media. Encontraron que la parte de los perfiles cercana a la pared crece casi linealmente y coincide con la solución Prantl-Blasius. Hacia grandes distancias, los perfiles empiezan a desviarse de la predicción teórica de capa límite laminar, especialmente para Ra bajos.

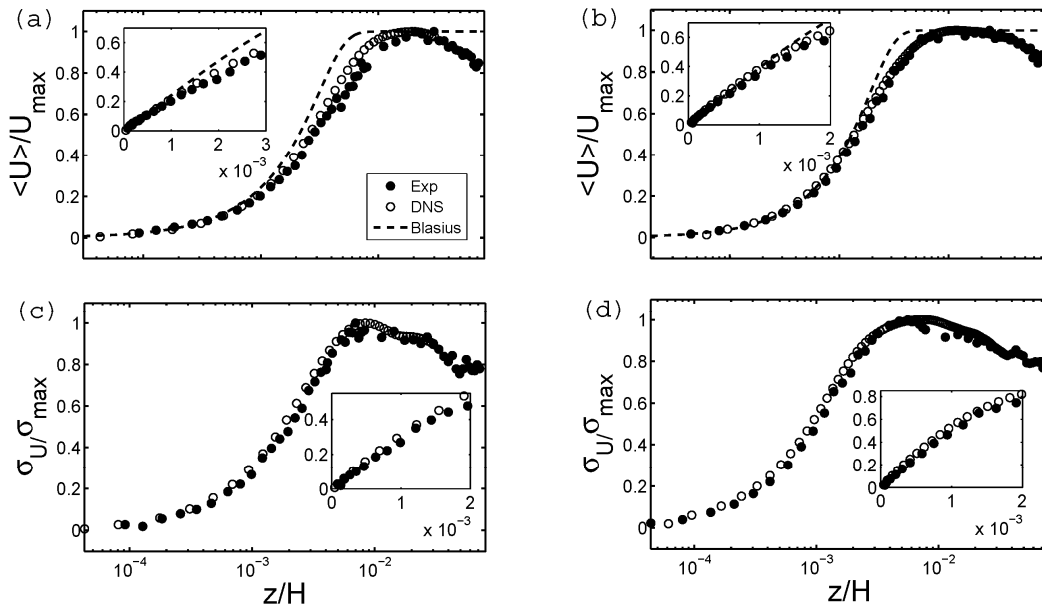


Figura 14. Perfiles de la velocidad media horizontal (a,b) y la desviación estándar (c,d) medidos en el experimento del barril de Ilmenau (círculos cerrados) y obtenidos mediante cálculos DNS por Puits et al. [22] (círculos abiertos) para $Ra = 3 \times 10^9$ (a, c) y $Ra = 3 \times 10^{10}$ (b, d). Las líneas discontinuas en a y b representan el campo de velocidades de un flujo laminar en un plato de acuerdo a Prandtl-Blasius. Los recuadros muestran la región próxima a la pared en el BL.

Concluyeron que el perfil Blasius no puede describir perfectamente los perfiles de velocidad media para convección RB turbulenta dentro de los Ra accesibles. La concordancia es ligeramente mejor para Ra grande.

Observaron que para las células RB con $\Gamma \leq 1$, los muros laterales afectan significativamente al flujo.

Por último, encontraron una dependencia del espesor de la capa límite con el número de Rayleigh, con lo que pudieron determinar una escala de referencia para el espesor en función del Ra con el mismo exponente que predijeron Grossmann y Lohse [1]. Determinaron que, debido a esta dependencia, así como al flujo altamente tridimensional, la transición a flujo turbulento podía ocurrir para números de Rayleigh menores de los esperado. En su segundo artículo, demostraron que el campo de temperaturas dentro de la capa límite convectiva en ambos platos es virtualmente independiente con el patrón del flujo global. Encontraron que, a lo largo de una gran fracción del espesor de la capa, el campo de temperaturas no sigue ninguna ley clara o siquiera se puede modelizar empleando una escala lineal o logarítmica.

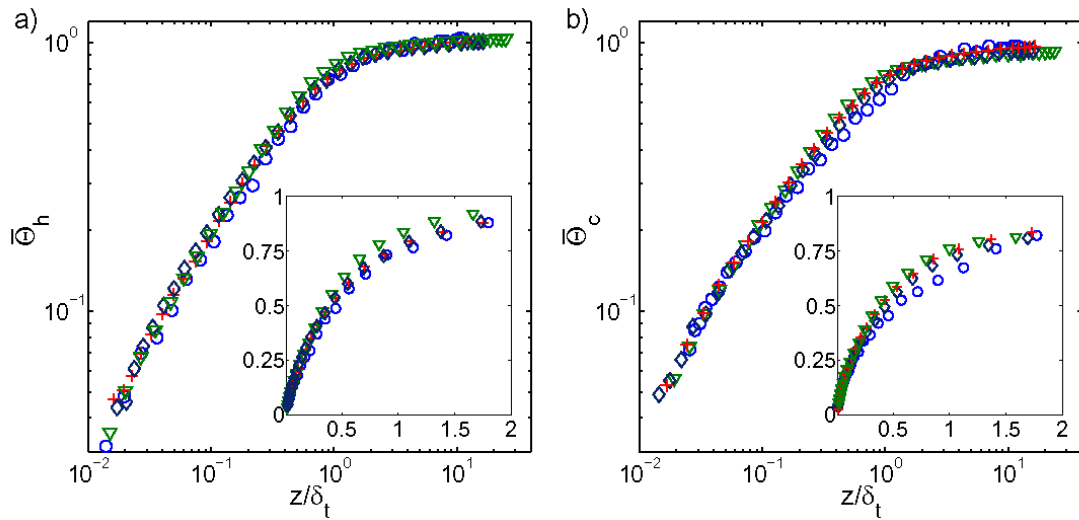


Figura 15. Perfiles de temperatura media normalizada $\Theta_h (z / \delta_t)$ en el plato caliente (a) y $\Theta_c (z / \delta_t)$ en el frío (b) para varias relaciones de aspecto $\Gamma = 1.13$ y $Ra = 5.2 \times 10^{10}$ (\circ , azul), $\Gamma = 2.00$ y $Ra = 5.3 \times 10^{10}$ ($+$, rojo), $\Gamma = 4.00$ y $Ra = 3.9 \times 10^9$ (\diamond , negro), y $\Gamma = 7.00$ y $Ra = 3.8 \times 10^9$ (∇ , verde), según los experimentos realizados por Puits et al. [23] Los recuadros muestran la región dentro de la capa límite en una representación logarítmica.

Otros autores como **Scheel, Kim y White** (2012) [49] han presentado resultados similares a los anteriores. Estudiaron las capas límite en convección turbulenta con $\Gamma = 1$, $Pr = 0.4$ y 0.7 , y números de Rayleigh desde 10^5 hasta 10^9 . Determinaron que los perfiles de temperatura desacuerdan en más del 10 % cuando son escalados por el espesor de la capa límite y que no concuerdan con los resultados Prandtl-Blasius. En contraste, los perfiles de la capa viscosa concuerdan muy bien, como ya determinaron du Puits et al. (2009) [22], acercándose bastante a la solución Prandtl-Blasius. También llegaron a la conclusión de que esta precisión decae según se aumenta el número de Rayleigh.

2. OBJETIVOS Y MOTIVACIÓN DEL PROYECTO

Vista la complejidad que presentan los casos de convección natural dentro de cavidades tridimensionales, uno de los objetivos del presente trabajo es determinar una serie de modelos de turbulencia aplicables a la hora de obtener resultados precisos del flujo convectivo.

Se pretende, bajo unas determinadas condiciones, dar unas pautas genéricas para poder desarrollar un caso fiable en un programa de simulación computacional CAD como es Fluent de Ansys, para que, como meta final, cualquier usuario de la aplicación o persona interesada en comprender los fenómenos que tienen lugar, sea capaz de llegar a soluciones aceptables en un tiempo relativamente corto y sin conocimientos muy avanzados del software o de los posibles métodos resolutivos para casos laminares y turbulentos.

Para todas las simulaciones, se aplicó la aproximación de Boussinesq para la determinación de la densidad como constante en todos los términos salvo para el de fuerzas másicas verticales. Dentro de los modelos de turbulencia que aceptan esta aproximación, las simulaciones se centraron en los modelos de dos ecuaciones, pues se tratan de los modelos más simples que ofrecen resultados completos. Estos modelos, k- ϵ y k-w respectivamente, emplean dos ecuaciones adicionales para resolver el transporte turbulento y describir independientemente dos variables turbulentas.

Los modelos de turbulencia con dos ecuaciones son los más empleados actualmente en el estudio de la convección RB, pues ofrecen resultados satisfactorios para cálculos relativamente asequibles.

En primera instancia, se decidió estudiar la convección RB en un entorno cilíndrico con gradiente de temperaturas ascendente entre sus placas horizontales y paredes laterales adiabáticas. Para ello, se asumieron los resultados mencionados en el apartado 1.3 y se simuló un dominio con relación de aspecto $\Gamma=1$, $Pr = 0.7$, donde el flujo creado debe ser axilsimétrico. Como base para comparar la precisión de la simulación, se cuenta con los trabajos antes mencionados, principalmente con los desarrollados en el **Barril de Ilmenau** [17, 18, 19, 20, 21].

Para facilitar los cálculos y, por tanto, la simulación, se empezó simplificando para un modelo bidimensional axilsimétrico del cilindro. A partir de valores bajos para el número de Rayleigh coincidentes con flujo laminar, se intentó llegar a la convergencia de una solución para números mayores en régimen turbulento, para extrapolar los resultados al caso tridimensional en ambos regímenes. El rango de valores para Ra que se pretende estudiar es $10^5 \sim 10^9$.

Más tarde, se aplican los resultados obtenidos para lograr un modelo robusto que consiga simular adecuadamente el dominio tridimensional entero, de forma que se puedan observar y estudiar los campos de velocidad y temperatura turbulenta a nivel de flujo global. También se aplicaron refinamientos de las mallas empleadas para lograr resultados mejores a lo largo de las capas límite de las paredes.

Sin embargo, dada la fuerte dependencia de la convección con los números adimensionales Ra , Pr y Γ , con la longitud vertical H y con el mallado del dominio, además de la arbitrariedad inherente al flujo, no fue posible obtener resultados satisfactorios para regímenes turbulentos altos y casi ni para el régimen laminar.

Los modelos desarrollados presentan una fuerte dependencia con la geometría, principalmente con H como ya demostraron estudios anteriores, y al tratarse de un flujo libre,

la arbitrariedad del mismo hace que sea prácticamente impredecible y que, por tanto, ningún modelo obtenga soluciones satisfactorias. Si dentro del dominio no se fuerza indirectamente a los flujos caliente y frío a seguir un determinado camino, los cálculos se vuelven altamente inestables.

Debido a los resultados insatisfactorios, y aún con el objetivo de proveer de un caso “realista” asequible de analizar y simular, se profundiza en las investigaciones llevadas a cabo por **Betts y Bokhari (2000) [6]**. Se simula, por tanto, el flujo convectivo que tiene lugar en una cavidad cúbica altamente esbelta con un gradiente de temperaturas aplicado entre las dos paredes laterales a ambos lados del ancho. En este caso, el estudio de la sección media sí que da buenos resultados, pudiendo limitarse la simulación al caso bidimensional y extrapolar resultados bastante acertados al caso tridimensional.

Comparando con los resultados experimentales obtenidos por estos dos autores, se profundiza en la elección del modelo adecuado, así como en definir sus características, tales como el tratamiento cerca de las paredes, régimen temporal u otros factores.

Bajo estas condiciones, se analizan los resultados obtenidos para los modelos turbulentos de dos ecuaciones típicos, además del modelo Transitional SST o *Transitional Shear Stress Transport model*. Este último modelo emplea cuatro ecuaciones del transporte, tomando ventaja de la precisa formulación del modelo k- ω cerca de las paredes, a la vez que proporciona una corriente libre independiente para regiones lejanas como el modelo k- ϵ .

Una vez obtenido un modelo robusto para la convección natural en cavidades bidimensionales, si intenta volver a estudiar el fenómeno dentro de un entorno cilíndrico. Para ello, se simula el flujo confinado entre dos cilindros concéntricos según la configuración de las condiciones de contorno del experimento en la cavidad rectangular.

En este caso, se verifica que este entorno puede simularse en forma bidimensional con condiciones de simetría, simplificando el problema y obteniendo soluciones fiables que pueden extenderse a todo el dominio fluido; otorgando de un problema complejo con opciones de simulación asequibles.

3. ANÁLISIS FÍSICO DEL PROBLEMA

Se trata de un problema de convección natural de Rayleigh-Bénard tridimensional cuyo fluido de trabajo es aire confinado en un depósito bajo el que se aplica una diferencia de temperaturas constante entre dos de sus paredes, siendo el resto adiabáticas. Las paredes isotermas se encuentran a una temperatura T_C y T_H .

Se presenta el problema para su resolución en dos entornos, una cavidad cúbica altamente esbelta y un depósito cilíndrico. Para el depósito cilíndrico, donde se crea un flujo altamente tridimensional, se hace indispensable estudiar los tres componentes de los ejes. Si se quiere profundizar en su estudio, una buena primera aproximación sería estudiar la sección media axilsimétrica del mismo. No obstante, aquí se planteará el problema tridimensional.

Respecto a la cavidad rectangular, los resultados de Betts y Bokhari (2000) [6] demostraron que los perfiles de velocidad y temperatura eran casi bidimensionales, salvo en zonas cercanas a las paredes delantera y trasera. Debido a esto, se decide estudiar únicamente la sección media vertical de la cavidad, despreciando la profundidad de la misma, planteando el problema bidimensionalmente.

Las ecuaciones que rigen el comportamiento físico del problema serán las ecuaciones de Navier-Stokes completas correspondientes a un fluido viscoso, conductor de calor y compresible. Estas ecuaciones se presentarán en forma diferencial.

No obstante, debido a la complejidad del análisis, está ampliamente extendido el empleo de simplificaciones y suposiciones demostradas empíricamente para facilitar el estudio.

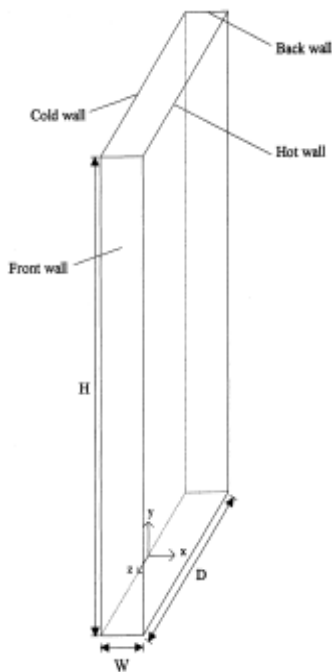


Fig. 16.A

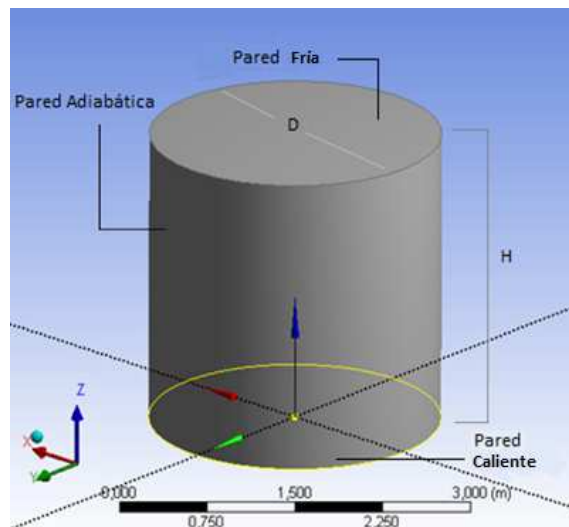


Fig. 16.B

Figura 16.A. Esquema de la cavidad rectangular muy esbelta del experimento de Betts y Bokhari (2000).

Figura 16.B. Esquema del depósito cilíndrico semejante al Barril de Ilmenau.

3.1. Modelo matemático

Las ecuaciones que rigen el problema son las ecuaciones en forma diferencial de Navier-Stokes, ecuación de continuidad, ecuación de conservación de la cantidad de movimiento y ecuación de conservación de la energía. Junto a estas ecuaciones, se presentan las consideraciones específicas del sistema, así como las condiciones de contorno requeridas en el problema.

❖ Régimen temporal:

Respecto a la cavidad cilíndrica, debido a su geometría y al flujo convectivo en sí, donde la velocidad varía rápidamente, no podemos suponer flujo enteramente estacionario. El sistema presentará varios regímenes transitorios y semi-estacionarios.

Partiendo del reposo, al comunicar una diferencia de temperaturas entre ambas placas, se genera mediante efectos de flotabilidad un flujo convectivo. Este flujo evolucionará dentro de un régimen transitorio hasta desarrollarse por completo.

Una vez desarrollado, pueden alcanzarse varias situaciones de equilibrio, uno estable coincidente con régimen laminar (Ra relativamente bajos) y otros inestables en régimen turbulento (Ra altos). A pesar de la multitud de estados transitorios que puede presentar el fenómeno, durante estos equilibrios se puede decir que los campos de velocidad y temperatura se vuelven independientes con el tiempo.

Cualquier perturbación desestabilizará estos equilibrios, siendo los más importantes las variaciones de temperatura o las dimensiones de la cavidad.

Debido a la gran variabilidad que presenta la velocidad en la cavidad, el estudio de las ecuaciones del problema se desarrollará dependiente con el tiempo tanto en coordenadas cartesianas como cilíndricas, aunque en la cavidad rectangular es más fácil desarrollar un régimen estacionario y mantenerlo.

❖ Aproximación de Boussinesq:

Ampliamente utilizada en análisis de convección natural de Rayleigh-Bénard, su afirmación más drástica es despremiar los efectos de la compresibilidad suponiendo densidad constante salvo cuando intervienen las fuerzas de flotabilidad. De este modo, no es necesario resolver las complejas ecuaciones de estado para gases y es suficiente con Navier-Stokes tomando la densidad como constante excepto en las fuerzas másicas, donde los efectos de flotabilidad generan el movimiento del fluido. Para modelizar las variaciones de densidad en este término, se emplea una dependencia lineal con respecto a la temperatura. La obtención de esta modelización puede encontrarse en el ANEXO AI.

Para emplearse esta aproximación correctamente, las variaciones relativas de densidad han de ser pequeñas. **Gray y Giorgini (1976) [26]** dictaminaron que la aproximación de Boussinesq puede aplicarse siempre y cuando las variaciones de una propiedad del sistema (temperatura) no provoquen una variación de las demás propiedades físicas mayor del 10%.

Esto provoca que:

- Se desprecien los efectos de compresibilidad y disipación viscosa (función de disipación de Rayleigh). Además, esto coincide con que el problema presente la mayoría de las veces un número de Reynolds alto, $Re \gg 1$, lo que disminuye enormemente el efecto de la disipación viscosa.
- La densidad se considera constante con la temperatura excepto en la dirección vertical. Esto es debido a la acción de la gravedad y de las fuerzas de flotación, que provocan que las variaciones de densidad no se puedan despreciar, y que se expresan como causa del movimiento mediante el término de las fuerzas másicas en la ecuación de la conservación de la cantidad de movimiento. En este término, la densidad se modeliza mediante una dependencia lineal con la temperatura obtenida en el ANEXO A1 a partir de (A1.18).

$$\rho = \rho_0[1 - \beta(T - T_0)] \quad (2.1)$$

Todas las demás propiedades del fluido (μ , K , β , CP) se consideran constantes respecto a los valores de temperatura y densidad de referencia.

Es gracias a que las paredes laterales sean adiabáticas que podemos aplicar correctamente la aproximación de Boussinesq. Si esas paredes fuesen conductoras, la aproximación sería errónea, teniendo que aplicar otros métodos de resolución.

❖ **Dominio de trabajo:**

- Fluido confinado en cavidad rectangular de altura H , ancho W y profundidad D . Aunque, como ya se ha mencionado, se estudiará la sección media de la cavidad dados los resultados empíricos.

$$(x, y, z) \in [0, W] \times [0, B] \times [0, H] \quad (2.2)$$

$$(x, z) \in [0, W] \times [0, H]$$

- Fluido confinado dentro de un depósito cilíndrico vertical de dimensiones D y H .

$$(r, \theta, z) \in [0, R] \times [0, 2\pi] \times [0, H] \quad (2.3)$$

❖ **Flujo Incompresible:**

A pesar de que el fluido de trabajo es aire, el cual es un fluido compresible, la aplicación de la aproximación de Boussinesq nos permite tratar las ecuaciones de Navier-Stokes como si de un fluido incompresible se tratase. Esto permite considerar densidad constante en todos los términos de las ecuaciones excepto en el de las fuerzas de flotabilidad, y suponer efectos de compresibilidad y disipación viscosa despreciables.

No obstante, sigue siendo necesaria una ecuación de transporte que relacione densidad y energía interna (entalpía), esto es, la ecuación de la conservación de la energía.

❖ **Condiciones de contorno de la cavidad rectangular:**

- Condición inicial, el fluido está en reposo.

$$\begin{aligned}\vec{U} &= \vec{U}(x, z, t) \\ \vec{U}(t = 0) &= 0\end{aligned}\tag{2.4}$$

- Pared en $x=0$ y $X=W$ isotérmicas, a temperatura T_C y T_H respectivamente.

$$\begin{aligned}T_{\text{PARED } x=0} &= T_C = \text{cte} \\ T_{\text{PARED } x=W} &= T_H = \text{cte}\end{aligned}\tag{2.5}$$

- Resto de paredes adiabáticas. Intercambio calorífico con el exterior nulo.

$$\left. \frac{\partial T}{\partial z} \right|_{z=0} = \left. \frac{\partial T}{\partial z} \right|_{z=H} = 0\tag{2.6}$$

- Condición de no deslizamiento en las paredes. La componente normal a las paredes de la velocidad es nula.

$$\begin{aligned}\vec{U} &= \vec{U}(x, y, z) \\ \vec{U} &= \vec{U}(0, y, z) = \vec{U}(W, y, z) = 0; \\ \vec{U} &= \vec{U}(x, y, 0) = \vec{U}(x, y, H) = 0;\end{aligned}\tag{2.7}$$

❖ **Condiciones de contorno del depósito cilíndrico:**

- Condición inicial, el fluido está en reposo.

$$\begin{aligned}\vec{U} &= \vec{U}(r, \theta, z, t) \\ \vec{U}(t = 0) &= 0\end{aligned}\tag{2.8}$$

- Placas superior e inferior isotérmicas, a temperatura T_H y T_C respectivamente.

$$\begin{aligned}T_{\text{PLACA SUPERIOR}} &= T_C = \text{cte} \\ T_{\text{PLACA INFERIOR}} &= T_H = \text{cte}\end{aligned}\tag{2.9}$$

- Pared lateral adiabática. Intercambio calorífico con el exterior nulo.

$$\left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{r=R} = 0 \quad (2.10)$$

- Condición de no deslizamiento en las paredes. La componente normal a las paredes de la velocidad es nula.

$$\begin{aligned} \vec{U} &= \vec{U}(r, \theta, z) \\ \vec{U} &= \vec{U}(r, \theta, 0) = 0; \\ \vec{U} &= \vec{U}(r, \theta, H) = 0; \\ \vec{U} &= \vec{U}(R, \theta, z) = 0; \end{aligned} \quad (2.11)$$

❖ Valores de referencia:

El problema presenta una serie de valores de referencia, $\rho_0, \mu_0, k_0, Cp_0, T_0$. Gracias a la aproximación tomada, estos se pueden suponer constantes y corresponden a aire a una temperatura media igual a $T_0 = \frac{T_H + T_C}{2}$.

3.1.1. Régimen laminar

❖ Ecuación de Continuidad:

Corresponde con el principio de conservación de la masa.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{u}) = 0 \quad (2.12)$$

Considerando, en este caso, la densidad constante, se puede simplificar la ecuación.

$$\nabla \cdot (\vec{u}) = 0 \quad (2.13)$$

Desarrollado para un entorno rectangular:

$$\frac{\partial U_x}{\partial x} + \frac{\partial U_y}{\partial y} + \frac{\partial U_z}{\partial z} = 0 \quad (2.14)$$

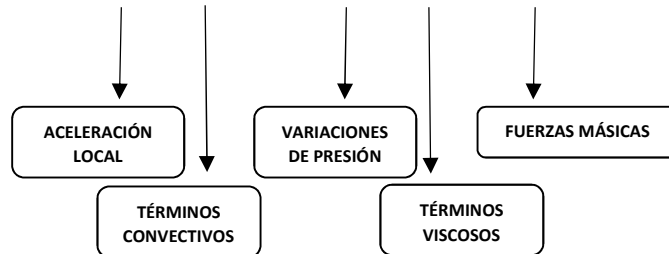
Y para uno cilíndrico:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial r U_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial U_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial U_z}{\partial z} = 0 \quad (2.15)$$

❖ Ecuación del transporte de la cantidad de movimiento:

Corresponde con la ecuación de conservación de la cantidad de movimiento:

$$\rho \frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + \rho \vec{U} \nabla (\vec{U}) = -\nabla \vec{P} + \nabla \vec{\tau} + \rho \cdot \vec{f_m} \quad (2.16)$$



De los términos de la izquierda, la derivada temporal representa la inercia contenida en el flujo o aceleración local una vez iniciado el movimiento convectivo. No se disponen de suficientes datos para despreciar este término.

El gradiente de velocidades representa los términos convectivos, de gran relevancia en este problema.

En cuanto a la derecha de la igualdad, el primer término se refiere a las variaciones de presión que tienen lugar en el sistema. Aunque estas variaciones están influenciadas por la flotabilidad, su importancia relativa respecto a estas fuerzas es baja.

Para expresar las fuerzas másicas, emplearemos la modelización lineal obtenida de la aproximación de Boussinesq en el ANEXO I (A1.18). Sólo se considerarán las variaciones de densidad a lo largo del eje vertical debido al efecto del campo gravitacional. Por tanto, las fuerzas másicas en las otras dos direcciones serán nulas, pues éstas no se ven afectadas por las fuerzas de flotabilidad.

La presión fluidostática se engloba dentro de la modelización lineal de las fuerzas de flotabilidad mediante el término $g\rho_0$, por lo que el gradiente de presiones P se referirá a partir de aquí únicamente a la presión inducida por el movimiento o presión hidrodinámica. Este gradiente es, por tanto, nulo para fluidos en reposo.

Respecto a los términos viscosos, estos vienen representados por el tensor de esfuerzos viscosos $\vec{\tau}$. Este tensor puede descomponerse para coordenadas cartesianas bidimensionales como,

$$\vec{\tau} = \begin{bmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\mu \frac{\partial u_x}{\partial x} & \mu \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) \\ \mu \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) & 2\mu \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (2.17)$$

Mientras que, en cilíndricas, este tensor quedaría:

$$\bar{\tau} = \begin{bmatrix} \tau_{rr} & \tau_{r\theta} & \tau_{rz} \\ \tau_{\theta r} & \tau_{\theta\theta} & \tau_{\theta z} \\ \tau_{zr} & \tau_{z\theta} & \tau_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\mu \frac{\partial u_r}{\partial r} & \mu \left[r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{u_\theta}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right] & \mu \left(\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) \\ \mu \left[r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{u_\theta}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right] & 2\mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial u_r}{\partial r} \right) & \mu \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} \right) \\ \mu \left(\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) & \mu \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} \right) & 2\mu \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

Las componentes de la diagonal representan las tensiones normales, mientras que el resto de componentes representan los esfuerzos cortantes que actúan sobre el dominio fluido. Este tensor es función de las propiedades dinámicas del fluido.

A continuación, se descompone la ecuación de conservación de cantidad de movimiento para las dos coordenadas cartesianas.

- **Dirección longitudinal:**

$$\rho \left(\frac{\partial U_x}{\partial t} + U_x \frac{\partial U_x}{\partial x} + U_y \frac{\partial U_x}{\partial y} + U_z \frac{\partial U_x}{\partial z} \right) = -\frac{\partial P}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 U_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U_x}{\partial z^2} \right) + \rho \cdot f m_x \quad (2.19)$$

$$\left(\frac{\partial U_x}{\partial t} + U_x \frac{\partial U_x}{\partial x} + U_y \frac{\partial U_x}{\partial y} + U_z \frac{\partial U_x}{\partial z} \right) = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial P}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 U_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U_x}{\partial z^2} \right) \quad (2.20)$$

- **Dirección vertical:**

$$\rho \left(\frac{\partial U_z}{\partial t} + U_x \frac{\partial U_z}{\partial x} + U_y \frac{\partial U_z}{\partial y} + U_z \frac{\partial U_z}{\partial z} \right) = -\frac{\partial P}{\partial z} + \mu \left(\frac{\partial^2 U_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U_z}{\partial z^2} \right) + \rho \cdot f m_z \quad (2.21)$$

$$\left(\frac{\partial U_z}{\partial t} + U_x \frac{\partial U_z}{\partial x} + U_y \frac{\partial U_z}{\partial y} + U_z \frac{\partial U_z}{\partial z} \right) = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial P}{\partial z} + \nu \left(\frac{\partial^2 U_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U_z}{\partial z^2} \right) - \frac{g(\rho - \rho_0)}{\rho_0} \quad (2.22)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial U_z}{\partial t} + U_x \frac{\partial U_z}{\partial x} + U_y \frac{\partial U_z}{\partial y} + U_z \frac{\partial U_z}{\partial z} \right) \\ = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial P}{\partial z} + \nu \left(\frac{\partial^2 U_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U_z}{\partial z^2} \right) + g\beta(T - T_0) \end{aligned} \quad (2.23)$$

Y para las componentes de las coordenadas cilíndricas.

- **Dirección radial:**

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial U_r}{\partial t} + U_r \frac{\partial U_r}{\partial r} + \frac{U_\theta}{r} \frac{\partial U_r}{\partial \theta} - \frac{U_\theta^2}{r} + U_z \frac{\partial U_r}{\partial z} \right) \\ = -\frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial r} + \mu \left(\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial(rU_r)}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 U_r}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 U_r}{\partial z^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial U_\theta}{\partial \theta} \right) + \rho \cdot f m_r \end{aligned} \quad (2.24)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial U_r}{\partial t} + U_r \frac{\partial U_r}{\partial r} + \frac{U_\theta}{r} \frac{\partial U_r}{\partial \theta} - \frac{U_\theta^2}{r} + U_z \frac{\partial U_r}{\partial z} \right) \\ = -\frac{1}{\rho_0 r} \frac{\partial P}{\partial r} + \nu \left(\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial(rU_r)}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 U_r}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 U_r}{\partial z^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial U_\theta}{\partial \theta} \right) \end{aligned} \quad (2.25)$$

- **Dirección angular:**

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial U_\theta}{\partial t} + U_r \frac{\partial U_\theta}{\partial r} + \frac{U_\theta}{r} \frac{\partial U_\theta}{\partial \theta} - \frac{U_r U_\theta}{r} + U_z \frac{\partial U_\theta}{\partial z} \right) = \\ -\frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial \theta} + \mu \left(\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial(rU_\theta)}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 U_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 U_\theta}{\partial z^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial U_r}{\partial \theta} \right) + \rho \cdot f m_\theta \end{aligned} \quad (2.26)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial U_\theta}{\partial t} + U_r \frac{\partial U_\theta}{\partial r} + \frac{U_\theta}{r} \frac{\partial U_\theta}{\partial \theta} - \frac{U_r U_\theta}{r} + U_z \frac{\partial U_\theta}{\partial z} \right) \\ = -\frac{1}{\rho_0 r} \frac{\partial P}{\partial \theta} + \nu \left(\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial(rU_\theta)}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 U_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 U_\theta}{\partial z^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial U_r}{\partial \theta} \right) \end{aligned} \quad (2.27)$$

- **Dirección vertical:**

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial U_z}{\partial t} + U_r \frac{\partial U_z}{\partial r} + \frac{U_\theta}{r} \frac{\partial U_z}{\partial \theta} + U_z \frac{\partial U_z}{\partial z} \right) = \\ -\frac{\partial P}{\partial z} + \mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial U_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 U_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 U_z}{\partial z^2} \right) + \rho \cdot f m_z \end{aligned} \quad (2.28)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial U_z}{\partial t} + U_r \frac{\partial U_z}{\partial r} + \frac{U_\theta}{r} \frac{\partial U_z}{\partial \theta} + U_z \frac{\partial U_z}{\partial z} \right) = \\ -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial P}{\partial z} + \nu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial U_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 U_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 U_z}{\partial z^2} \right) - \frac{g(\rho - \rho_0)}{\rho_0} \end{aligned} \quad (2.29)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial U_z}{\partial t} + U_r \frac{\partial U_z}{\partial r} + \frac{U_\theta}{r} \frac{\partial U_z}{\partial \theta} + U_z \frac{\partial U_z}{\partial z} \right) \\ = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial P}{\partial z} + \nu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial U_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 U_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 U_z}{\partial z^2} \right) + g\beta(T - T_0) \end{aligned} \quad (2.30)$$

Los términos adicionales en ambos lados de las componentes r y θ surgen debido a la naturaleza especial de las coordenadas cilíndricas. De esta manera, conforme se mueve en la dirección θ , el vector unitario \vec{r} , también cambia de dirección; por lo tanto, las componentes r y θ se acoplan.

❖ Ecuación del transporte de la energía:

Al tratarse de un fenómeno de convección libre, no es posible determinar el campo de velocidades y de temperaturas independientemente, por lo que es necesario el empleo de la ecuación de la energía, concretamente de la entalpía.

De esta ecuación se obtiene la ley de enfriamiento de Newton (**Figura 1**).

En coordenadas cartesianas para el dominio rectangular.

$$\rho C_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + U_x \frac{\partial T}{\partial x} + U_z \frac{\partial T}{\partial z} \right) = \phi_v + Q_r + Q_q + K \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) \quad (2.31)$$

El término a la izquierda del igual representa, por un lado, el incremento temporal de calor en el sistema; y, por otro, el flujo de calor convectivo transmitido por el sistema.

Los términos a la derecha del igual representan términos de calor emitido no convectivo. El último expresa el calor transferido por conducción, mientras que los tres primeros se refieren a:

$\phi_v \equiv$ función de disipación de Rayleigh, disipación viscosa, representa la energía disipada por medio de la viscosidad.

$$\phi_v = \mu \left(2 \left(\frac{\partial U_x}{\partial x} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial U_z}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial U_x}{\partial z} + \frac{\partial U_z}{\partial x} \right)^2 \right) \quad (2.32)$$

$Q_r \equiv$ fuerza volumétrica de calor emitido por radiación.

$Q_q \equiv$ fuerza volumétrica de calor debida a reacción química.

Teniendo en cuenta que no se producen reacciones químicas dentro del flujo y que la radiación emitida por la placa caliente puede despreciarse (estudios empíricos han demostrado que este término raramente alcanza el 0.1% de la energía total transferida), tan sólo permanecen la disipación viscosa y la transferencia por conducción como términos fuente de calor no convectivo.

No obstante, al aplicar la aproximación de Boussinesq, se consideran tanto los efectos por compresibilidad como la disipación viscosa despreciables, por lo que la función de viscosidad de Rayleigh también puede omitirse.

Con ello, el balance final de energía queda, para el sistema de coordenadas cartesianas,

$$\rho C_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + U_x \frac{\partial T}{\partial x} + U_z \frac{\partial T}{\partial z} \right) = K \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) \quad (2.33)$$

Este balance indica la relación existente entre el calor transferido por convección y por conducción dentro del flujo. En condiciones ideales, todo el calor por conducción que transfieren las placas al fluido se disipa por convección dentro del mismo.

Referido a coordenadas cilíndricas, el desarrollo de esta ecuación sería el siguiente,

$$\rho C_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + U_r \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{U_\theta}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta} + U_z \frac{\partial T}{\partial z} \right) = \phi_v + Q_r + Q_q + K \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) \quad (2.34)$$

$$\phi_v = \mu \left(2 \left(\left(\frac{\partial U_r}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial U_\theta}{\partial \theta} + \frac{U_r}{r} \right)^2 + \left(\frac{\partial U_z}{\partial z} \right)^2 \right) + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial U_z}{\partial \theta} + \frac{\partial U_\theta}{\partial z} \right)^2 + \left(r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{U_\theta}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial U_r}{\partial \theta} \right)^2 + \left(\frac{\partial U_r}{\partial z} + \frac{\partial U_z}{\partial r} \right)^2 \right) \quad (2.35)$$

$$\rho C_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + U_r \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{U_\theta}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta} + U_z \frac{\partial T}{\partial z} \right) = K \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) \quad (2.36)$$

De este modo, se obtiene el modelo matemático que rige la convección natural laminar que tiene lugar en el sistema para un fluido de trabajo (aire) sobre el que se aplica una diferencia de temperatura ΔT . La diferencia de temperaturas es suficientemente baja como para poder considerar verídica la aproximación de Boussinesq.

En las dos páginas siguientes se encuentra el modelo matemático en coordenadas cartesianas para la cavidad rectangular y en coordenadas cilíndricas para el depósito.

CAVIDAD RECTANGULAR

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial U_x}{\partial x} + \frac{\partial U_y}{\partial y} + \frac{\partial U_z}{\partial z} = 0 \\ \\ \left(\frac{\partial U_x}{\partial t} + U_x \frac{\partial U_x}{\partial x} + U_y \frac{\partial U_x}{\partial y} + U_z \frac{\partial U_x}{\partial z} \right) = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial P}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 U_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U_x}{\partial z^2} \right) \\ \\ \left(\frac{\partial U_z}{\partial t} + U_x \frac{\partial U_z}{\partial x} + U_y \frac{\partial U_z}{\partial y} + U_z \frac{\partial U_z}{\partial z} \right) \\ = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial P}{\partial z} + \nu \left(\frac{\partial^2 U_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U_z}{\partial z^2} \right) + g\beta(T - T_0) \\ \\ \rho C_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + U_x \frac{\partial T}{\partial x} + U_y \frac{\partial T}{\partial y} + U_z \frac{\partial T}{\partial z} \right) = K \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{U}(t = 0) = 0; \\ \\ T_{\text{PARED } x=0} = T_C = \text{cte}; \\ \\ T_{\text{PARED } x=w} = T_H = \text{cte}; \\ \\ \left. \frac{\partial T}{\partial z} \right|_{z=0} = \left. \frac{\partial T}{\partial z} \right|_{z=H} = 0; \\ \\ \vec{U} = \vec{U}(0, y, z) = \vec{U}(W, y, z) = 0; \\ \\ \vec{U} = \vec{U}(x, y, 0) = \vec{U}(x, y, H) = 0; \end{array} \right.$$

(2.37)

DEPÓSITO CILÍNDRICO

$$\left. \begin{aligned}
 & \frac{1}{r} \frac{\partial r U_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial U_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial U_z}{\partial z} = 0 \\
 & \left(\frac{\partial U_r}{\partial t} + U_r \frac{\partial U_r}{\partial r} + \frac{U_\theta}{r} \frac{\partial U_r}{\partial \theta} - \frac{U_\theta^2}{r} + U_z \frac{\partial U_r}{\partial z} \right) \\
 & \quad = -\frac{1}{\rho r} \frac{\partial P}{\partial r} + \nu \left(\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial (r U_r)}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 U_r}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 U_r}{\partial z^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial U_\theta}{\partial \theta} \right) \\
 & \left(\frac{\partial U_\theta}{\partial t} + U_r \frac{\partial U_\theta}{\partial r} + \frac{U_\theta}{r} \frac{\partial U_\theta}{\partial \theta} - \frac{U_r U_\theta}{r} + U_z \frac{\partial U_\theta}{\partial z} \right) \\
 & \quad = -\frac{1}{\rho \theta} \frac{\partial P}{\partial \theta} + \nu \left(\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial (r U_\theta)}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 U_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 U_\theta}{\partial z^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial U_r}{\partial \theta} \right) \\
 & \left(\frac{\partial U_z}{\partial t} + U_r \frac{\partial U_z}{\partial r} + \frac{U_\theta}{r} \frac{\partial U_z}{\partial \theta} + U_z \frac{\partial U_z}{\partial z} \right) \\
 & \quad = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} + \nu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial U_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 U_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 U_z}{\partial z^2} \right) + g\beta(T - T_0) \\
 & \rho C_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + U_r \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{U_\theta}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta} + U_z \frac{\partial T}{\partial z} \right) = K \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right)
 \end{aligned} \right\}$$

$$\left\{ \begin{aligned}
 & \vec{U}(t = 0) = 0; \\
 & T_{z=H} = T_C = \text{cte}; \\
 & T_{z=0} = T_H = \text{cte}; \\
 & \left. \frac{\partial \vec{T}}{\partial r} \right|_{r=R} = 0; \\
 & \vec{U} = \vec{U}(r, \theta, 0) = 0; \\
 & \vec{U} = \vec{U}(r, \theta, H) = 0; \\
 & \vec{U} = \vec{U}(R, \theta, z) = 0;
 \end{aligned} \right.$$

(2.38)

3.1.2. Régimen turbulento

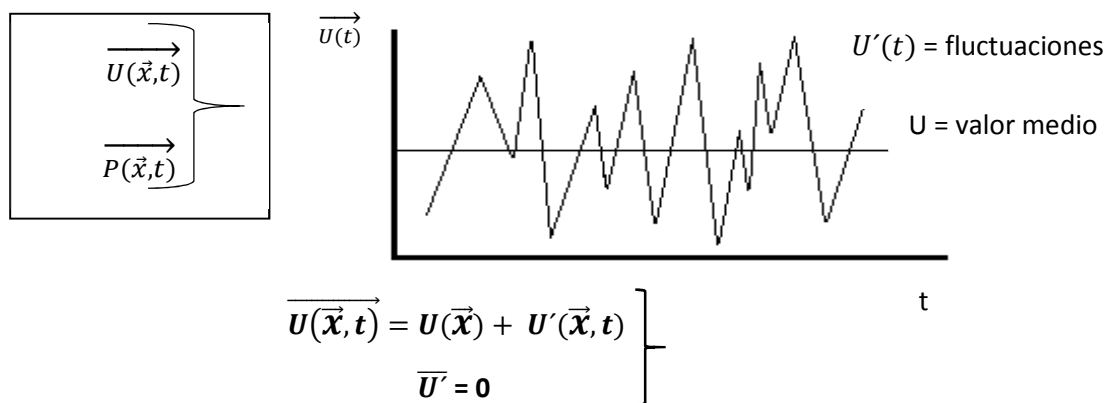
A partir de cierto valor del número de Rayleigh, denominado **Rayleigh crítico Ra_c** , el aumento de los parámetros del problema produce en el sistema ciertas perturbaciones (denominadas **inestabilidades hidrodinámicas**) que no pueden ser disipadas por el flujo (generalmente a través de la viscosidad), de forma que el sistema genera otra manera de disipar esta energía, esto es, mediante **turbulencia**. Así pues, el valor crítico Ra_c representa la frontera entre la transición de un régimen laminar a uno turbulento.

La transición de un régimen a otro en convección libre depende de la magnitud relativa de las fuerzas viscosas y de flotabilidad. Esta relación es la que está representada en términos del número de Rayleigh (**Figura 12**). El estado transitorio que da lugar al régimen turbulento tiene un fuerte impacto sobre la transferencia de calor.

Este régimen turbulento se produce como respuesta al aumento de energía del problema, tratándose de un estado de equilibrio inestable. En él, aunque las ecuaciones del flujo se encuentran equilibradas, sus términos no son estables y presentan fluctuaciones.

De este modo, cuando el problema presenta turbulencia, debemos desglosar las variables en sus valores medios más la suma de las fluctuaciones de los mismos a lo largo del flujo, sustituyendo la descomposición en las ecuaciones de Navier-Stokes. Es en este caso, cuando a estas ecuaciones se la denomina **ecuaciones del flujo medio**.

La descomposición de las variables del problema (velocidad, temperatura, presión, ...) se produce para facilitar el estudio matemático de estas magnitudes físicas. Aun así, a la hora de estudiar la turbulencia de un sistema, el apoyo en resultados experimentales se hace obligatorio.



$$\langle \overline{U'}(t) \rangle = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum \overline{U'}(t)_i = 0; \quad \text{promedio de las fluctuaciones}$$

$$\overline{\overline{U'}(t)} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \overline{U'}(t) dt = 0; \quad \text{media de las fluctuaciones}$$

Se comprueba que ambas convergen y, aunque matemáticamente no son iguales, se

Figura 17. Descomposición de las variables del sistema en valor medio y fluctuaciones. Estas últimas convergen estadísticamente si se aplican medias.

Entonces, si se resuelven estadísticamente las ecuaciones de flujo medio para régimen turbulento, se puede aplicar descomposición y medias de los parámetros requeridos. De este modo, el término de las fluctuaciones podrá despreciarse la mayoría de las ocasiones, quedando únicamente involucrado el término medio y facilitando enormemente el estudio.

Esto último puede apreciarse en la ecuación de continuidad.

$$\bar{\nabla} \cdot \bar{\mathbf{U}} = 0 \quad (2.41)$$

No obstante, aparecen dos términos asociados a las fluctuaciones de las variables que no pueden despreciarse a pesar de las suposiciones tomadas.

El primero se encuentra en la ecuación de conservación de la cantidad de movimiento y representa los **esfuerzos de Reynolds**. Estos esfuerzos se engloban dentro de los esfuerzos turbulentos del flujo y relacionan la cantidad de movimiento que intercambian entre sí el valor medio \mathbf{U} y las fluctuaciones \mathbf{u}' .

$$\rho \nabla(\bar{\mathbf{U}}\bar{\mathbf{U}}) = -\nabla \bar{P} + \nabla(\bar{\tau} - \rho \overline{\mathbf{u}'\mathbf{u}'}') + \rho \cdot \bar{\mathbf{f}}\bar{\mathbf{m}} \quad (2.42)$$

CONVECCIÓN

$\overline{\mathbf{u}'\mathbf{u}'} = \begin{bmatrix} \overline{u'^2} & \overline{u'v'} & \overline{u'w'} \\ \overline{u'v'} & \overline{v'^2} & \overline{v'w'} \\ \overline{u'w'} & \overline{v'w'} & \overline{w'^2} \end{bmatrix}$

ESF. DE REYNOLDS

ESF. VISCOSOS

ESF. TURBULENTO

(2.43)

Al tratarse de fluctuaciones de velocidad al cuadrado, el exponente echa por tierra la consideración de su valor medio prácticamente nulo. Tal término será una matriz compuesta por una diagonal con las fluctuaciones de velocidad en las tres direcciones al cuadrado y por los productos de las fluctuaciones. Entonces, viendo la estructura de la matriz, se puede comprobar que se trata de un transporte de cantidad de movimiento, junto a los términos convectivos intercambia c.m. entre velocidad media y fluctuaciones, y transporta c.m. a través de presiones y de fuerzas en todas las direcciones. Así pues, se puede afirmar que se trata de un esfuerzo que aparece en turbulencia encargado de equilibrar el flujo a través de la cantidad de movimiento.

El otro término se haya en la ecuación de conservación de la energía y representa el intercambio de calor convectivo que tiene lugar entre las fluctuaciones de temperatura y velocidad, por lo que también se denomina **gradiente de flujo de calor turbulento**.

$$\rho C_p(\bar{\mathbf{U}} \cdot \nabla \bar{T}) = \nabla \cdot \mathbf{K} \cdot \nabla T - \rho C_p \nabla(\bar{T}'\mathbf{u}') \quad (2.44)$$

$$\overline{T'\mathbf{u}'} = [\overline{T'u'} \quad \overline{T'v'} \quad \overline{T'w'}] \quad (2.45)$$

4. ANÁLISIS DIMENSIONAL

El análisis dimensional es importante principalmente por dos motivos. Por un lado, permite conocer el número mínimo de variables que gobierna un determinado problema, reduciendo las variables físicas originales a un conjunto menor de parámetros adimensionales. De esta forma, racionaliza la experimentación, ya que establece cuáles son los parámetros realmente relevantes en un determinado proceso.

Esta minimización de las variables también permite establecer de una forma precisa cuáles son las condiciones que se deben cumplir para que exista **semejanza física** entre dos problemas, no hay más que exigir que las variables adimensionales sean iguales.

El otro motivo por el que el análisis dimensional es importante es que permite conocer con precisión cuando una determinada variable es relevante o no en un problema, ya que las nuevas variables son puros números adimensionales; basta averiguar si alguno de esos números es siempre muy pequeño, o muy grande, o aproximadamente constante, para que esa variable no influya, prácticamente, en el proceso y pueda ser despreciada en los cálculos. Es decir, cuando el sistema es muy complejo, el análisis dimensional nos permite obtener una solución bastante cercana a la real teniendo en cuenta únicamente las variables o términos realmente influyentes en el proceso.

4.1. Semejanza física

La reducción de las variables físicas de las cuales depende un determinado proceso mediante el uso de variables adimensionales puede obtenerse de forma general independientemente de las leyes o relaciones que gobiernen el proceso.

Para ello, se aplica el Teorema de Pi-Buckingham, el cual determina que, si la ley o sistema de ecuaciones que rige un proceso que involucra m variables es dimensionalmente homogéneo, éstas pueden ser reducidas a una relación de $m-n$ grupos adimensionales independientes, donde n es el número de dimensiones de referencia necesarios para describir todas las variables.

El resultado final será el número de parámetros independientes mínimo de los que depende el problema.

Se reúnen todos los parámetros de los problemas,

-Geometría cilíndrica: diámetro D (m), radio R (m), altura H (m) y ángulo azimutal θ (rad).

-Geometría rectangular: ancho W (m), altura H (m).

-Propiedades del fluido: densidad ρ (kg/m³), viscosidad dinámica μ (kg/m·s), viscosidad cinemática ν (m²/s), coeficiente de expansión térmica β (K⁻¹), calor específico a presión constante C_p (J/kg·K), conductividad térmica k (J/m·s·K) y difusividad térmica α (m²/s).

-Características del flujo: tiempo de flujo t (s), aceleración de la gravedad g (m/s²) y variación de temperatura entre placas ΔT [K].

Las variables del problema serán los campos o perfiles de temperaturas $T[K]$, presiones $P(\vec{d}, t) \left[\frac{kg}{m \cdot s^2} \right]$ y velocidades $U(\vec{d}, t) \left[\frac{m}{s} \right]$.

La viscosidad cinemática ν (m²/s) relaciona la viscosidad dinámica μ con la densidad ρ :

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} \equiv \frac{\left[\frac{kg}{m \cdot s} \right]}{\left[\frac{kg}{m^3} \right]} \equiv \left[\frac{m^2}{s} \right] \quad (3.1)$$

De igual manera, el calor específico a presión constante C_p y la conductividad térmica k también se encuentran relacionados mediante la difusividad térmica α :

$$\alpha = \frac{\kappa}{\rho C_p} \equiv \frac{\left[\frac{J}{m \cdot s \cdot K} \right]}{\left[\frac{kg}{m^3} \right] \cdot \left[\frac{J}{kg \cdot K} \right]} \equiv \left[\frac{m^2}{s} \right] \quad (3.2)$$

Por lo tanto, los parámetros independientes m del problema de convección natural, sin entrar en detalle en el tipo de geometría, son

$$\{t, \text{GEOMETRÍA}, \rho, \nu, \beta, k, \alpha, \Delta T\} \rightarrow m = 9 \text{ parámetros adimensionales} \quad (3.3)$$

Si se consideran $n = 4$ dimensiones necesarias para resolver el problema, esto es, tiempo, longitud, masa y temperatura, se obtienen 5 grupos adimensionales de los que depende el problema genérico.

$$\text{Grupos Adimensionales} = m - n = 9 - 4 = 5 \quad (3.4)$$

A continuación, se determinan los parámetros característicos del sistema:

- Parámetro temporal característico, difusividad térmica α (m²/s).
- Parámetro de longitud característica, H (m).
- Parámetro de masa característica, ρ (kg/m³).
- Parámetro de temperatura característica, diferencia de temperaturas entre placas $\Delta T = T_H - T_C$ (K).

Entonces, la solución que proporciona los perfiles de temperatura, presiones y velocidad del problema de convección natural sin entrar en detalle con la geometría, depende de 5 grupos adimensionales más los relativos a la geometría específica. Estos grupos pueden obtenerse adimensionalizando mediante los parámetros característicos el resto de variables independientes del sistema.

$$\{\prod T, \prod P, \prod U\} \equiv \varphi \left\{ \prod t, \prod \text{GEOMETRÍA}, \prod \nu, \prod \beta, \prod k, \prod g \right\} \quad (3.5)$$

$$\left\{ \frac{T}{\Delta T}, \frac{P \cdot H^2}{\rho \cdot \alpha^2}, \frac{U \cdot H}{\alpha} \right\} \equiv \varphi \left\{ \frac{t \cdot \alpha}{h^2}, \frac{\text{GEOMETRÍA}}{\text{ADIMENSIONAL}}, \frac{\nu}{\alpha}, \beta \cdot \Delta T, \frac{k \cdot \Delta T \cdot H^2}{\rho \cdot \alpha^3}, \frac{g \cdot H^3}{\alpha^2} \right\}$$

Se observa que estos grupos pueden reducirse si el flujo se encuentra en modo estacionario. Del mismo modo, la geometría juega un papel importante, incrementando el número de grupos dependiendo de la complejidad de la misma y las relaciones que hagan falta para definirla.

Gracias a este teorema, para que dos problemas sean físicamente semejantes no es necesario que sean idénticos, sino que, en primera instancia, es suficiente con que todos los grupos adimensionales lo sean.

Esto permite hacer experimentación con **modelos** de forma rigurosa, extrapolándose sin ambigüedad los resultados al problema real. Por ejemplo, ante un sistema complejo, puede realizarse un modelo a escala, más asequible de obtener, y experimentar sobre él teniendo en cuenta que los grupos adimensionales sean los mismos. De esta forma, desarrollando un entorno asequible de analizar, se pueden construir y obtener resultados para sistemas más complejos, requiriendo sólo conocer un número limitado de variables y sin necesidad de simular el experimento.

Además, generalmente, los resultados empíricos llevan a establecer correlaciones, muy importantes a la hora de estudiar el flujo, que se basan precisamente en estos grupos adimensionales.

4.2. Adimensionalización del problema

Hasta aquí, se ha adimensionalizado el sistema principalmente para su estudio experimental. Para obtener una solución precisa adimensionalizada del problema, se debe aplicar este análisis a todas las variables y ecuaciones.

Esto permite simplificar los cálculos necesarios para la resolución del problema. La solución física real se obtiene deshaciendo los cambios de variable que se aplicarán más adelante mediante las magnitudes características.

Como ya se vio en el apartado anterior, una vez presentado el problema en su forma no dimensional, para que sea semejante físicamente con otro problema no es necesario que sean idénticos, sino que es suficiente con que todos los parámetros adimensionales de las ecuaciones de Navier-Stokes, así como los que aparecen en las condiciones de contorno, sean iguales. Si se cumple esta igualdad, la solución adimensional del problema es la misma en ambos. La solución física de cada problema se obtendrá, de nuevo, deshaciendo el cambio de variable mediante las magnitudes respectivas de cada problema.

El cambio de variable a forma no dimensional se lleva a cabo empleando unas escalas de referencia que se establecen a continuación para la longitud, la velocidad, el tiempo y la presión.

- Longitud característica L : para el cilindro, será la dimensión vertical H (m), mientras que para la cavidad rectangular se define con el ancho W (m). A efectos de cálculo, se deja en función de L para luego sustituir apropiadamente en cada entorno.
- Velocidad característica: velocidad difusiva α/L (m/s).
- Tiempo característico: tiempo de difusión térmico L^2/α (s).
- Presión dinámica característica: $\rho \cdot (\alpha/L)^2$ (kg/m³).

Estas escalas son arbitrarias y se pueden escoger en función de la inercia, de la viscosidad, de la flotabilidad o de la difusividad. En este caso, se ha escogido la difusividad porque anteriormente ya se había seleccionado esta variable como parámetro característico.

Empleando estas escalas, se aplica el cambio a variables adimensionales, de forma que estas nuevas variables sean de orden unidad.

$$\nabla^* = (L \cdot \nabla)$$

$$t^* = \frac{t}{L^2/\alpha} = \frac{\alpha}{L^2} t$$

$$U^* = \frac{U}{\alpha/L} = \frac{L}{\alpha} U$$

$$\vartheta^* = \frac{\vartheta}{\Delta T} = \frac{T - T_c}{T_H - T_c}$$

$$P^* = \frac{P}{\rho \cdot (\alpha/L)^2} = \frac{L^2}{\rho \cdot \alpha^2} P$$

$$\text{GEOMETRÍA RECTANGULAR: } x^* = \frac{x}{W}, z^* = \frac{z}{W} \quad (3.6)$$

$$\text{GEOMETRÍA CILÍNDRICA: } r^* = \frac{r}{H}, \theta^* = \theta$$

Si introducimos el cambio de variable en las ecuaciones de Navier-Stokes se obtiene su forma adimensional, coincidente para coordenadas cartesianas y cilíndricas.

$$\bullet \quad \nabla^* \cdot \mathbf{u}^* = 0; \quad (3.7)$$

$$\frac{\alpha^2}{L^3} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}^*}{\partial t^*} + \frac{\alpha^2}{L^3} \cdot \mathbf{u}^* \cdot \nabla^*(\mathbf{u}^*) = -\frac{\alpha^2}{L^3} \cdot \nabla^* P^* + \frac{\mu \cdot \alpha}{\rho \cdot L^3} \nabla^{*2} \mathbf{u}^* + g \cdot \beta \cdot \Delta T \cdot \vartheta^*,$$

$$\bullet \quad \frac{\partial \mathbf{u}^*}{\partial t^*} + \mathbf{u}^* \cdot \nabla^*(\mathbf{u}^*) = -\nabla^* P^* + \frac{\mu}{\rho \cdot \alpha} \nabla^{*2} \mathbf{u}^* + \frac{L^3 \cdot g \cdot \beta \cdot \Delta T}{\alpha^2} \cdot \vartheta^*; \quad (3.8)$$

$$\frac{\rho \cdot Cp \cdot \alpha \cdot \Delta T}{L^2} \left(\frac{\partial \vartheta^*}{\partial t^*} + \mathbf{u}^* \cdot \nabla^*(\vartheta^*) \right) = \frac{K \cdot \Delta T}{L^2} (\nabla^{*2} \vartheta^*),$$

$$\frac{\partial \vartheta^*}{\partial t^*} + \mathbf{u}^* \cdot \nabla^*(\vartheta^*) = \frac{K}{\rho \cdot Cp \cdot \alpha} (\nabla^{*2} \vartheta^*),$$

$$\bullet \quad \frac{\partial \vartheta^*}{\partial t^*} + \mathbf{u}^* \cdot \nabla^*(\vartheta^*) = \nabla^{*2} \vartheta^*; \quad (3.9)$$

Los parámetros adimensionales que aparecen en cada término da una idea de la importancia de ese término en relación a los términos convectivos, que están multiplicados por la unidad.

El dominio de trabajo y las condiciones de contorno quedan, en coordenadas cartesianas,

$$(x^*, z^*) \in [0, 1] \times [0, \frac{H}{W}];$$

$$\vartheta^*(z^* = 0) = 1;$$

$$\vartheta^*(z^* = 1) = 0;$$

$$\left. \frac{\partial \vartheta^*}{\partial z^*} \right|_{z^*=0} = \left. \frac{\partial \vartheta^*}{\partial z^*} \right|_{z^*=1} = 0;$$

$$\mathbf{u}^*(x^* = 0) = \mathbf{u}^*(x^* = 1) = 0;$$

$$\mathbf{u}^*(z^* = 0) = \mathbf{u}^*(z^* = H/W) = 0; \quad (3.10)$$

Y en coordenadas cilíndricas,

$$\begin{aligned}
 (r^*, \theta^*, z^*) &\in \left[0, \frac{R}{H}\right] \times [0, 2\pi] \times [0, 1] \\
 \vartheta^*(z^* = 0) &= 1 \\
 \vartheta^*(z^* = 1) &= 0 \\
 \left. \frac{\partial \vartheta^*}{\partial r^*} \right|_{r^* = R/H} &= 0 \\
 u^*(z^* = 0) &= u^*(z^* = 1) = 0 \\
 u^*(r^* = R/H) &= 0
 \end{aligned} \tag{3.11}$$

Se puede observar que las ecuaciones del sistema, en particular la ecuación de conservación de la cantidad de movimiento, dependen de varios grupos adimensionales del problema, $\Pi v, \Pi \beta, y \Pi g$. Del mismo modo, las condiciones de contorno también dependen de las relaciones geométricas del recinto.

En efecto, los numerosos estudios teóricos y empíricos que se han llevado a cabo a partir de los estudios de Batchelor respecto a la convección de Rayleigh-Bénard, han demostrado que el problema depende de cinco parámetros o números adimensionales. La dinámica del flujo está determinada por 3 parámetros de entrada (Ra, Pr, Γ); mientras que la respuesta del sistema al gradiente de temperaturas se refleja en dos parámetros de salida (Nu, Re).

De este modo, se definen:

❖ **Número de Rayleigh,** $Ra = \frac{g \cdot \beta \cdot \Delta T \cdot L^3}{\nu \cdot \alpha},$ (3.12)

Indica la importancia relativa de las fuerzas de flotación respecto de las viscosas en el seno del fluido. Caracteriza un punto crítico a partir del cual cualquier perturbación inicia el movimiento convectivo, es decir, indica el tipo de transferencia de calor.

$$Ra > 1000 \rightarrow 100\% \text{ convectiva}$$

$$Ra < 10 \rightarrow 100\% \text{ conductiva}$$

❖ **Número de Prandtl,** $Pr = \vartheta / \alpha$ (3.13)

Relaciona la difusividad viscosa y la difusividad térmica, es decir, la facilidad de difundir cantidad de movimiento respecto a la difusión de calor.

Su valor influye también en la topología de flujo y en el régimen del mismo, pues determina de qué modo el sistema puede hacer frente a las perturbaciones, dependiendo de si la viscosidad puede disipar toda la energía o son necesarios otros mecanismos.

❖ **Relación de aspecto,** $\Gamma_{CILINDRO} = D/H, \Gamma_{RECTANGULAR} = H/W;$ (3.14)

Relaciona los parámetros geométricos de la celda RB.

Se observa como sus definiciones son inversas. Esto se debe a que esta relación se define según el sentido del gradiente de temperaturas, vertical para el cilindro y horizontal para la cavidad rectangular.

Se ha demostrado que para relaciones de aspecto unitarias ($\Gamma = 1$), el flujo convectivo adquiere un patrón de movimiento en forma de rollo único alrededor de las paredes de la cavidad. A partir de número mayores ($\Gamma > 1$), este rollo de dimensiones proporcionales a las de la cavidad, se va rompiendo en otros menores de forma que el flujo adquiere patrones dobles, triples, múltiples, ... Esta topología de flujo se denomina rollos convectivos.

❖ **Número de Reynolds,** $Re = \bar{v} \cdot L/\nu$ (3.15)

Siendo \bar{v} la velocidad media del flujo, este número relaciona las fuerzas inerciales presentes en los términos convectivos con las fuerzas viscosas. Este parámetro indica, además, la tipología del flujo: valores muy altos revelan flujo turbulento, mientras que valores relativamente bajos dictaminan flujo laminar.

❖ **Número de Nusselt,** $Nu = h \cdot L/k = \dot{q} \cdot L/k \cdot \Delta T$ (3.16)

Donde h es el coeficiente de transferencia de calor convectivo, que se puede sustituir empleando la ley de enfriamiento de Newton (1.1) para el flujo de calor convectivo \dot{q} .

Este número mide el aumento de transmisión de calor real respecto a aquella que ocurre sólo bajo conducción, proporcionando una medida de la transferencia de calor por convección.

La transferencia de calor en un sistema RB es una función de los números de Nusselt, Reynolds, Rayleigh y Prandtl y de la geometría mediante el parámetro Γ .

Así pues, el problema que rige este tipo de convección, se puede reescribir en parámetros adimensionales de la siguiente manera,

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla^* \cdot \mathbf{u}^* = 0 \\ \frac{\partial \mathbf{u}^*}{\partial t^*} + \mathbf{u}^* \cdot \nabla^*(\mathbf{u}^*) = -\nabla^* P^* + Pr \cdot \nabla^{*2} \mathbf{u}^* + Pr \cdot Ra \cdot \vartheta^* \\ \frac{\partial \vartheta^*}{\partial t^*} + \mathbf{u}^* \cdot \nabla^*(\vartheta^*) = \nabla^{*2} \vartheta^* \end{array} \right. \quad (3.17)$$

Con la relación de aspecto Γ presente en las condiciones de contorno de cada problema, definida de modo apropiado en cada una.

4.3. Órdenes de magnitud

Una vez establecidos los parámetros característicos, así como las escalas de referencia del problema, es posible estimar un orden de magnitud para cada término presente en las ecuaciones. Mediante los órdenes de magnitud se puede determinar de una manera bastante precisa la relación existente entre estos términos y conocer la importancia relativa de cada uno en el problema.

Este apartado se centra en el análisis de los órdenes de magnitud concernientes al problema tridimensional del **Barril de Ilmenau**. Los resultados correspondientes a la cavidad rectangular ya son conocidos y aplicados al presente problema (flujo bidimensional por esbeltez).

❖ Ecuación de continuidad

De la ecuación de continuidad representada en (2.10), se puede extraer del modelo bidimensional que la geometría de la cavidad juega un papel muy importante en la distribución del campo de velocidades del flujo entre sus componentes longitudinal y transversal.

$$\begin{aligned}\theta\left(\frac{\partial U_l}{\partial d_l}\right) &\sim \theta\left(\frac{\partial U_t}{\partial d_t}\right) \\ U_l/D &\sim U_t/H \\ U_l/U_t &\sim D/H \sim \Gamma\end{aligned}\tag{3.18}$$

Para relaciones de aspecto menores de uno, la principal componente del flujo será la velocidad longitudinal. Esto se puede aplicar en cavidades esbeltas.

Para un valor unitario de la relación, ambas componentes tienen un efecto importante en el flujo, formándose el rollo convectivo antes mencionado.

Según aumenta el número adimensional, la importancia de las velocidades transversales va incrementándose, hasta obtener el patrón de multirollos donde la componente principal del campo de velocidades cambia constantemente.

Esto permite extrapolar al caso tridimensional que, contando siempre con relaciones de aspecto mayores de uno, las tres componentes del campo de velocidades tienen una importancia equiparable.

❖ Ecuación de conservación de la cantidad de movimiento

En el ANEXO I se obtiene un valor para la velocidad característica del problema UC y de las variaciones de presión dinámica a partir de la ecuación (2.13). Si se tiene en cuenta que el movimiento del fluido está causado por las fuerzas de flotabilidad, se puede obtener un valor característico para la velocidad que se transmite al flujo mediante estas fuerzas a lo largo de una distancia H.

$$U_C \sim \sqrt{h \cdot g \cdot \beta \cdot (T - T_0)} \quad (3.19)$$

$$\nabla p \sim \rho_0 \cdot h \cdot g \cdot \beta \cdot (T - T_0)$$

Para comprobar que es cierto que en este proceso dominan las fuerzas de flotabilidad, se comparan los órdenes de los términos obtenidos para la ecuación de cantidad de movimiento adimensionalizada (3.17), sabiendo que, al estar sin dimensiones reales, sus órdenes de magnitud son unitarios.

$$\frac{\theta(\text{convención})}{\theta(\text{flotabilidad})} \sim \frac{\theta(u^* \cdot \nabla^*(u^*))}{\theta(Pr \cdot Ra \cdot \vartheta^*)} \sim \frac{1}{Pr \cdot Ra} \ll 1$$

$$\theta(\text{convención}) \ll \theta(\text{flotabilidad}) \quad (3.20)$$

$$\frac{\theta(\text{viscosidad})}{\theta(\text{flotabilidad})} \sim \frac{\theta(Pr \cdot \nabla^{*2} u^*)}{\theta(Pr \cdot Ra \cdot \vartheta^*)} \sim \frac{Pr}{Pr \cdot Ra} \sim \frac{1}{Ra} \ll 1$$

$$\theta(\text{viscosidad}) \ll \theta(\text{flotabilidad}) \quad (3.21)$$

$$\frac{\theta(\text{viscosidad})}{\theta(\text{convención})} \sim \frac{\theta(Pr \cdot \nabla^{*2} u^*)}{\theta(u^* \cdot \nabla^*(u^*))} \sim Pr < 1$$

$$\theta(\text{viscosidad}) < \theta(\text{convención}) \quad (3.22)$$

Teniendo en cuenta que, durante este trabajo, $Pr = \text{cte} = 0.7$ y Ra se encuentra en el intervalo de 10^5 a 10^{10} , se comprueba que el efecto dominante es la flotabilidad, y que la convección es ligeramente más relevante que la viscosidad.

Por último, también se pueden sacar conclusiones acerca del régimen temporal del problema a partir de (2.13). Para ello se relaciona la importancia relativa de la aceleración local frente a los esfuerzos viscosos, buscando comparar el tiempo característico de transmisión de las fuerzas de flotabilidad con el tiempo viscoso.

$$\frac{\theta(\text{inercia})}{\theta(\text{viscosidad})} \sim \frac{\theta\left(\rho \frac{\partial U}{\partial t}\right)}{\theta(\mu \nabla^2 U)} \sim \frac{\rho \frac{U_c}{t_c}}{\mu \frac{U_c}{h^2}} \sim \frac{h^2/\nu}{t_c} \quad (3.23)$$

El numerador del anterior cociente representa el tiempo viscoso, que refleja el tiempo que la viscosidad tarda en comunicar las perturbaciones a distancias de orden h .

$$t_v \sim h^2/\nu \quad (3.24)$$

Si el tiempo característico del problema coincide con el tiempo de transmisión de los efectos de flotabilidad, este se puede escribir como:

$$t_c \sim h/U_c \sim \frac{\sqrt{h}}{\sqrt{g \cdot \beta \cdot (T - T_0)}} \quad (3.23)$$

Para las propiedades y fluido del problema, así como para la mayoría de los casos dados, este tiempo característico va a ser siempre menor que el viscoso. Para una altura genérica $h = 1\text{m}$ y una diferencia de temperaturas de 2.4°C sobre una temperatura media de 30°C ,

$$\begin{aligned} t_c &\sim 3.58 \text{ s} \\ t_v &\sim h^2/\nu \sim 54000 \text{ s} \end{aligned} \quad (3.24)$$

Esto quiere decir que los esfuerzos viscosos tardan muchísimo más en comunicarse por el fluido que la velocidad característica, ya que ésta tarda poco en variar. Como consecuencia, estamos ante un problema de carácter transitorio y, además, implica la existencia de dos regiones en el fluido. Una de ellas corresponde con la zona central y comprende casi todo el dominio fluido, en ella los esfuerzos viscosos son prácticamente despreciables. En la otra región, coincidente con las zonas en contacto con las paredes a lo largo de una capa delgada de grosor d , la importancia de ambos términos se ha de tener en cuenta y no se pueden despreciar sus efectos.

❖ Ecuación de conservación de la energía

Tomando órdenes de magnitud en (2.29) y relacionando convección y conducción, se puede estimar un valor para el tiempo de difusión, o tiempo que tarda el flujo en disipar la energía a través de la difusión térmica.

$$\frac{\theta(\text{inercia})}{\theta(\text{convección})} \sim \frac{\theta\left(\rho C p \frac{\partial T}{\partial t}\right)}{\theta(k \nabla^2 T)} \sim \frac{\rho C p \frac{T}{t_c}}{k \frac{T}{h^2}} \sim \frac{h^2/\alpha}{t_c} \quad (3.25)$$

Para las propiedades y fluido del problema,

$$t_d \sim h^2/\alpha \sim 38000 \text{ s} \quad (3.26)$$

Con lo que la consideración de régimen transitorio y dos regiones en el flujo vuelve a verificarse, esta vez para la difusión térmica, que tarda más en comunicarse a través del sistema que las variaciones de velocidad característica.

Por último, se puede comprobar que despreciar los efectos disipativos por acción de la viscosidad frente a los convectivos es una suposición acertada si se aplica la aproximación de Boussinesq. Se relacionan los órdenes de magnitud entre convección (2.29) y disipación viscosa (2.31).

$$\frac{\theta(\text{disipación})}{\theta(\text{convección})} \sim \frac{\theta(\tau:\nabla U)}{\theta(\rho C_p \cdot U \nabla T)} \sim \frac{\mu \frac{U_c^2}{h^2}}{\rho C_p \frac{U_c \Delta T}{h}} \sim \frac{v \cdot U_c}{C_p \cdot h \cdot \Delta T} \sim \frac{v}{C_p} \sqrt{\frac{g \cdot \beta}{h \cdot \Delta T}} \quad (3.27)$$

Para la gran mayoría de problemas de convección natural, puede comprobarse que el cociente anterior es muy pequeño. Según las longitudes y temperaturas características del problema, además de las propiedades del fluido,

$$\frac{\theta(\text{disipación})}{\theta(\text{convección})} \sim \frac{v}{C_p} \sqrt{\frac{g \cdot \beta}{h \cdot \Delta T}} \sim 2.13 \times 10^{-9} \ll 1 \quad (3.28)$$

Con lo que despreciar la función disipativa de Rayleigh es una buena aproximación.

5. SIMULACIÓN NUMÉRICA

Para simular el fenómeno de convección natural dentro de una cavidad, se ha empleado el software de CFD (Computational Fluids Dynamics) Ansys Fluent.

Este programa es una poderosa herramienta que permite realizar avanzados cálculos de Dinámica de Fluidos a la vez que proporciona una valiosa interfaz en la que representar las soluciones y simular todo tipo de flujos.

Se simulan varias geometrías referenciadas a dos entornos específicos, una cavidad cúbica altamente esbelta que puede simplificarse al caso bidimensional, y un depósito cilíndrico con relación de aspecto $\Gamma = 1$. Para ambos sistemas, se aplican diversos modelos de turbulencia de dos ecuaciones para determinar si estos modelos serían una elección adecuada. Se estudia, por tanto, el flujo en régimen turbulento que puede tener lugar en estos sistemas.

Los valores de las propiedades físicas en ambos problemas se obtuvieron a partir de la siguiente tabla para aire seco a presión atmosférica. Esta tabla se puede encontrar en la colección de tablas que ofrece **Incropera et al. [31]**.

Temperatura		Densidad	Expansión térmica coeficiente	Calor específico	Conductividad térmica	Difusividad térmica	Viscosidad absoluta	Viscosidad cinemática
T		ρ	$\beta \times 10^3$	c_p	k	$\alpha \times 10^6$	$\mu \times 10^6$	$\nu \times 10^8$
K	°C	(kg/m³)	(1/K)	(J/kg·K)	(W/m·K)	(m²/s)	(N·s/m²)	(m²/s)
273	0	1,252	3,66	1011				
293	20	1,164	3,41	1012	0,0251	22,0	18,240	15,7
313	40	1,092	3,19	1014	0,0265	24,8	19,123	17,6
333	60	1,025	3,00	1017	0,0279	27,6	19,907	19,4
353	80	0,968	2,83	1019	0,0293	30,6	20,790	21,5
373	100	0,916	2,68	1022	0,0307	33,6	21,673	23,6

Figura 18. Tabla con propiedades del aire seco a presión atmosférica para distintos valores de temperatura.

5.1. Depósito cilíndrico

Las primeras simulaciones se llevaron a cabo para un depósito cilíndrico tridimensional según el montaje del Barril de Ilmenau donde trabajaron du Puits et al. [18, 19, 20, 21, 22, 23].

Mediante las conclusiones que estos investigadores aportaron, así como empleando los consejos que proporciona el Manual del Usuario de Fluent, se pretende dar con un modelo, configuración y mallado capaz de simular el fenómeno de convección natural en régimen turbulento que aquí tiene lugar.

La geometría requerida se modela utilizando el software *Design Modeler* que incluye por defecto el propio programa Fluent. El objetivo es crear un *Fluid Body* que tenga áreas superficiales y volumen, para poder examinar la malla, los contornos y diversos puntos del dominio.

La generación de este volumen de diámetro y altura, $D = H = 2.5$ m., se lleva a cabo mediante la función *Sweep* ("extender/barrer"). Esta operación requiere definir dos *sketches*; uno que defina el perfil a extender y otro que marque el camino por el cual el perfil será extendido.

En este caso, el perfil será la base circular de diámetro D , mientras que el camino lo designará el eje vertical del cilindro con altura H .

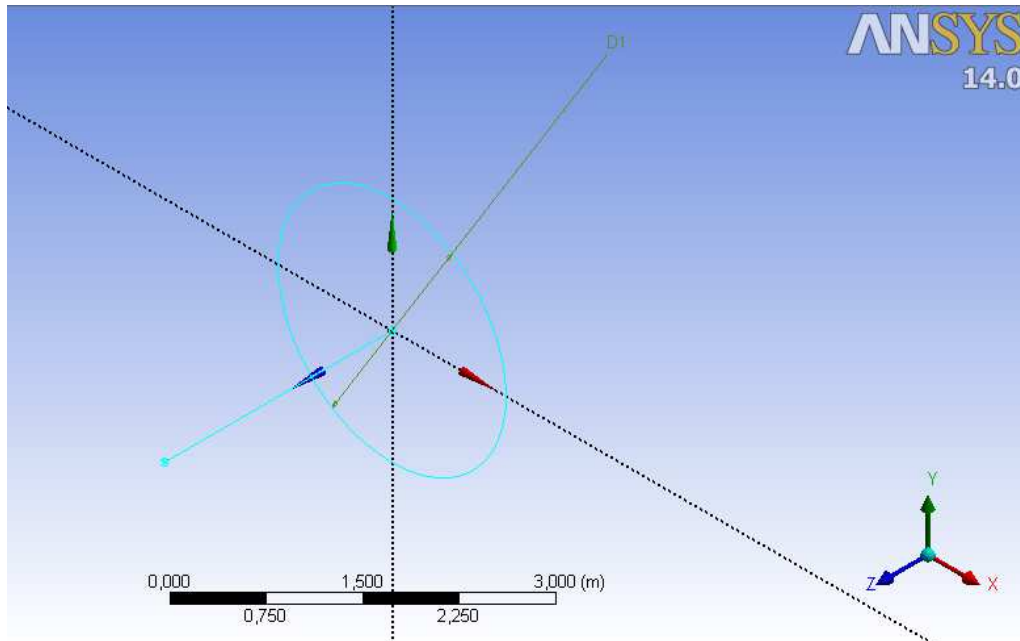


Figura 19. Sketches que mediante la función *Sweep* dan lugar a un volumen cilíndrico. El perfil será la base circular de diámetro D , mientras que el camino lo define la recta de longitud H a lo largo del eje z .

Tras esto, no queda más que asignar al Fluid Body un volumen fluido para terminar de modelar la geometría.

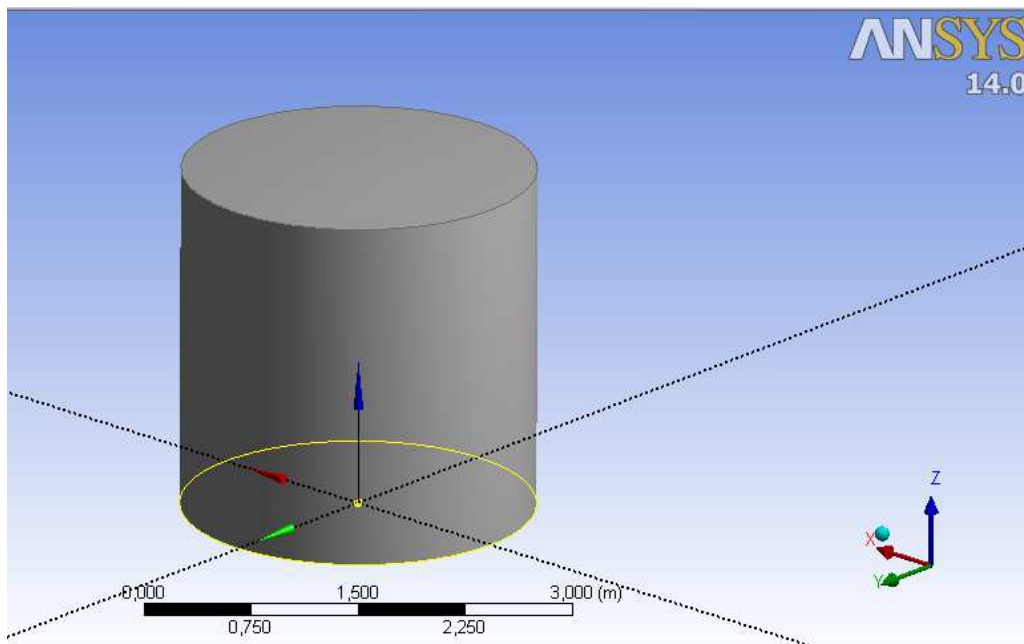


Figura 20. Geometría cilíndrica de altura H y diámetro D . El eje vertical del cilindro coincide con el eje z .

La división del dominio computacional también se ha llevado a cabo con la aplicación que incorpora el propio programa Ansys Fluent. La aplicación carga por defecto la geometría que se modeló anteriormente, con lo que el primer paso será nombrar las fronteras del dominio: la pared lateral y las dos placas horizontales.

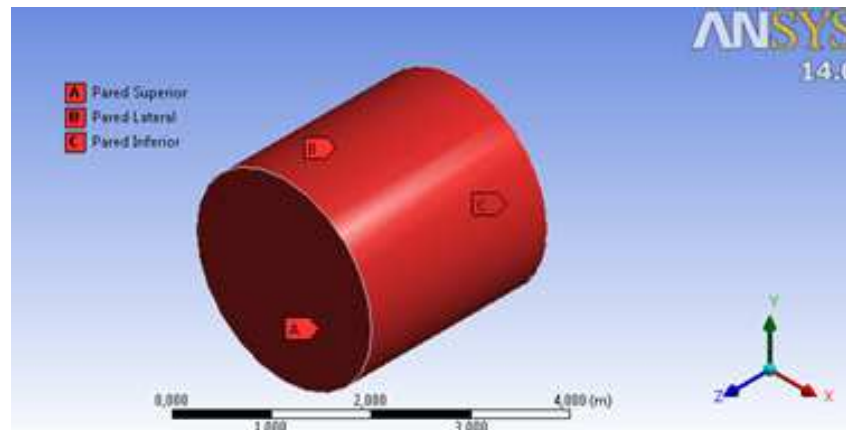


Figura 21. Fronteras del depósito cilíndrico.

Con el objetivo de suministrar los suficientes puntos al dominio computacional, se escogerá como tamaño elemental de las celdas de la malla *Element Size* $e = 0.02m$. Esta distribución debería arrojar buenos resultados tanto para campo medio como para la región próxima a las paredes.

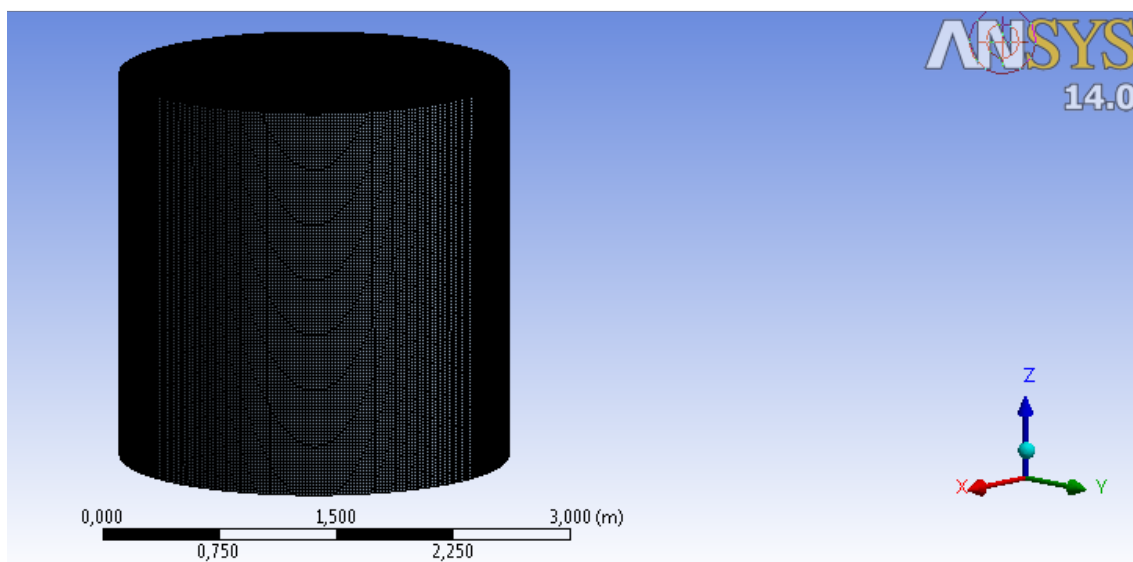


Figura 22. Dominio mallado, element size $e = 0.02 m$.

Se escoge una diferencia de temperaturas $\Delta T = 2.4^\circ\text{C}$, fijando una temperatura de la placa inferior caliente de $T_H = 304.2\text{ K}$ y para la placa superior fría $T_C = 301.8\text{ K}$. La pared lateral es adiabática y las tres cumplen la condición de no deslizamiento para la velocidad. El vector de la aceleración actúa a lo largo del eje de simetría, en sentido negativo.

La temperatura de referencia a la que serán calculados las propiedades del fluido se define como la temperatura media $T_m = T_0 = \frac{T_H + T_C}{2} = 303\text{ K}$.

Como la diferencia de temperaturas aplicada es suficientemente pequeña, se puede emplear el modelo Boussinesq como definición de la densidad, especificando para esta propiedad un valor constante, con lo que la masa estaría apropiadamente especificada.

Para el coeficiente de expansión térmica se introduce $\beta = 1/T_0 = 0.0033\text{ (K}^{-1}\text{)}$.

El caso se define acorde a los pasos y consejos que recomienda la guía del usuario de Fluent para la simulación de flujos Buoyancy (accionados por efectos de flotabilidad) y flujos con transferencia de calor. No obstante, dada la complejidad intrínseca al fenómeno de convección natural, estos pasos no ofrecen soluciones rápidas y sencillas para la simulación, siendo necesario constantemente el análisis de los datos proporcionados y la mejora del modelo empleado para obtener soluciones correctas y/o más precisas. Este proceso requiere ciertos conocimientos del simulador, así como conocer en profundidad los mecanismos que tienen lugar en el sistema.

Se escoge una aproximación basada en la presión, *pressure-based solver*, típicamente empleada para flujos incompresibles y medianamente compresibles. Al aplicar la aproximación de Boussinesq, se puede catalogar el flujo dentro de esta categoría.

Respecto a los métodos de resolución, para la discretización espacial de la presión se escoge *PRESTO!*, pues se trata de una buena aproximación para estos casos. El resto de discretizaciones se dejan por defecto, excepto para momento y energía, con las que se juega entre el primer y el segundo esquema para, o bien obtener una solución convergida aceptable; o bien para redefinir la solución a partir de una ya convergida.

El principal consejo que da la guía es inicializar el campo fluido. Esto es, a parte de iniciar la simulación a partir de los valores de referencia en reposo, obtener resultados para flujos complejos a partir de soluciones convergidas para flujos similares más sencillos. Se inicia la solución empezando con un número de Rayleigh bajo y se desarrolla ésta hasta la convergencia, aumentando poco a poco el valor del Rayleigh y la precisión de las discretizaciones. El método para variar el número de Rayleigh efectivo y mantener un sistema análogo es modificar la aceleración de la gravedad desde un primer valor de 0.098 hasta 9.8, aumentando de diez en diez la magnitud.

No obstante, las primeras simulaciones demostraron una fuerte dependencia con el volumen de la cavidad, principalmente con la altura H . De este modo, fue imposible obtener una solución intentando simular el experimento completo que llevaron a cabo en Ilmenau.

Aunque el tamaño de las celdas demostró ser el adecuado; pues con menos concentración los residuos tendían a divergir, mientras que para mayor número de celdas los cálculos se volvían demasiado complejos, no fue posible obtener una solución para este volumen en un tiempo razonable. Tras más de siete mil iteraciones, los residuos de las

ecuaciones mantenían unos valores prácticamente constantes lejos del criterio de convergencia, principalmente para la ecuación de continuidad.

Incluso partiendo del caso más sencillo, con $g = 0.098 \text{ m/s}^2$ y una diferencia de temperaturas muy pequeña, esto es, coincidente con régimen laminar, al programa le costaba un tiempo de una hora aproximadamente iterar 1000 veces las ecuaciones. Así pues, viendo que alcanzar una solución en un tiempo razonable no era posible para esta geometría, se decidió cambiar las dimensiones de la cavidad. Como ya se ha mencionado, gracias al análisis dimensional y la semejanza física, es posible comparar acertadamente la convección natural que tiene lugar en dos sistemas de igual geometría, aunque posean distintas dimensiones.

Los posteriores cambios en la geometría terminaron de demostrar que, para valores de las dimensiones mayores de la unidad, los cálculos se volvían demasiado complejos y tomaban demasiado tiempo. Las primeras simulaciones que arrojaron datos fiables y en tiempo más corto fueron para una altura $H = 0.5 \text{ m}$.

Empleando un esquema de primer orden para la discretización de la energía y el momento (*First Order Scheme*) y fijando el factor de relajación para la energía en 0.8, se consigue converger las ecuaciones para $g = 0.098 \text{ m/s}^2$ y $\Delta T = 2.4 \text{ K}$, empleando un modelo laminar estacionario, alrededor de las 2600 iteraciones.

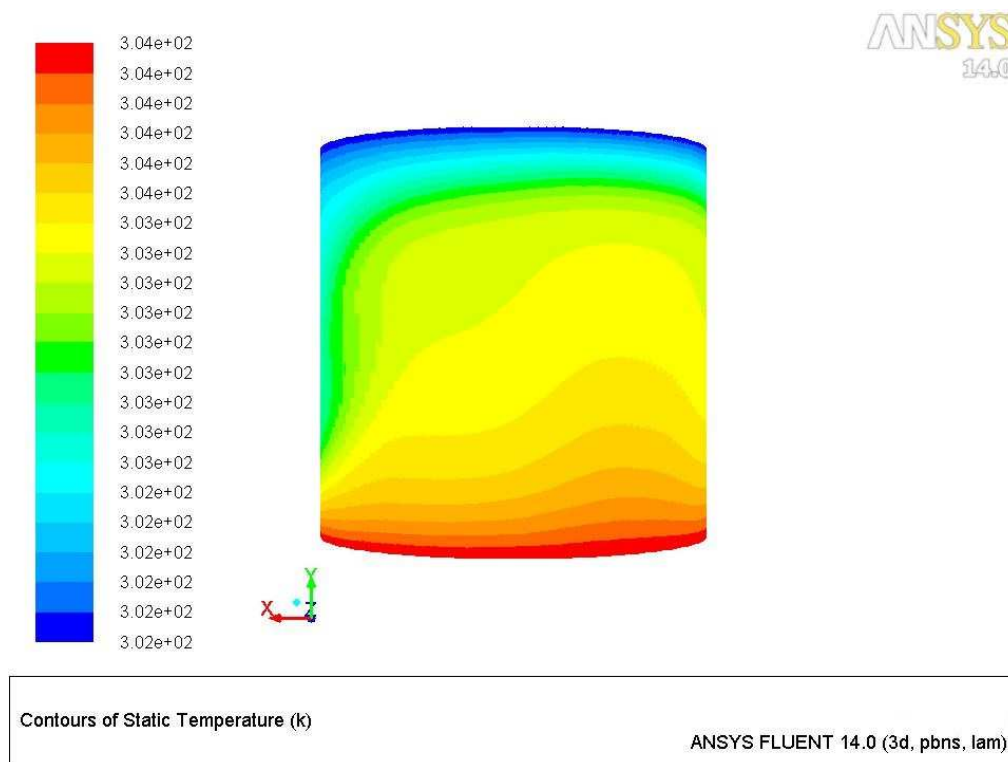


Figura 23. Campo de temperaturas a lo largo de la pared adiabática para $g = 0.098 \text{ m/s}^2$ y $\Delta T = 2.4 \text{ K}$. Se aprecia el flujo de aire más caliente ascendiendo por una de las zonas de la pared.

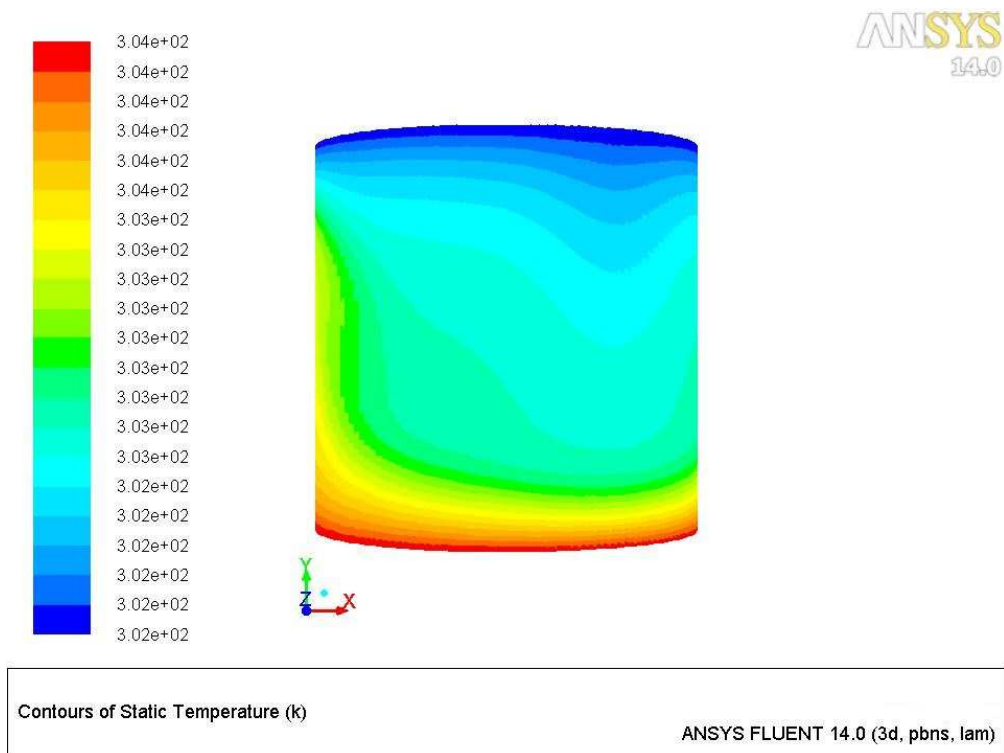


Figura 24. Campo de temperaturas a lo largo de la pared adiabática para $g = 0.098 \text{ m/s}^2$ y $\Delta T = 2.4 \text{ K}$. Se aprecia el flujo de aire más frío descendiendo por una de las zonas de la pared.

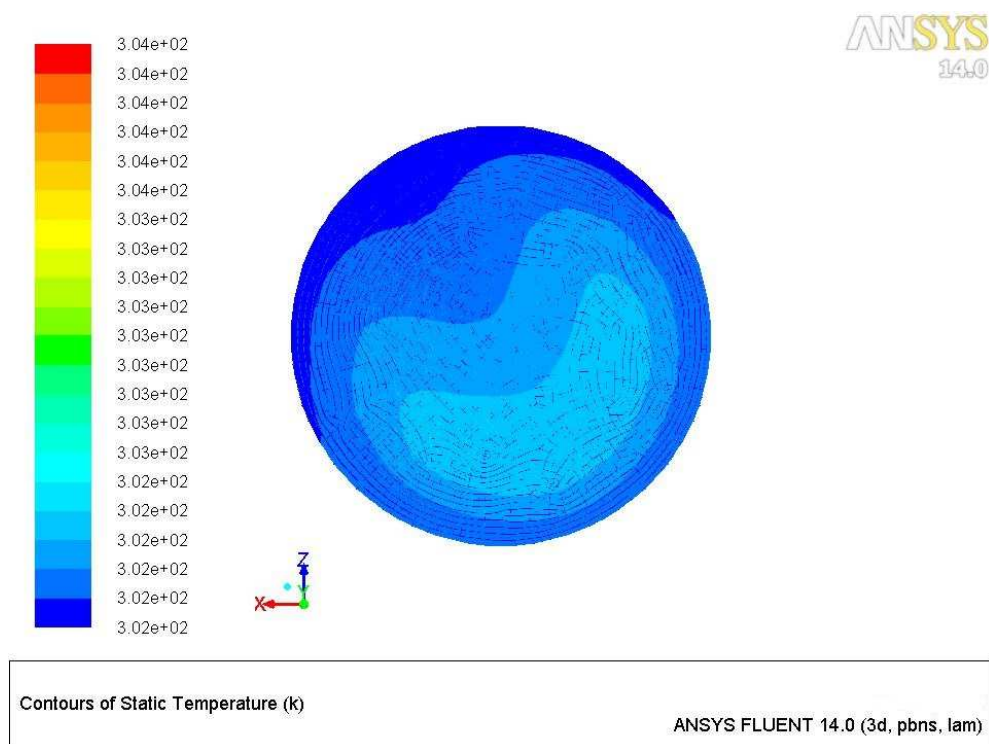


Figura 25. Campo de temperaturas en la región del fluido próxima a la placa fría para $g = 0.098 \text{ m/s}^2$ y $\Delta T = 2.4 \text{ K}$. Las zonas de mayor temperatura coinciden con el flujo caliente ascendente.

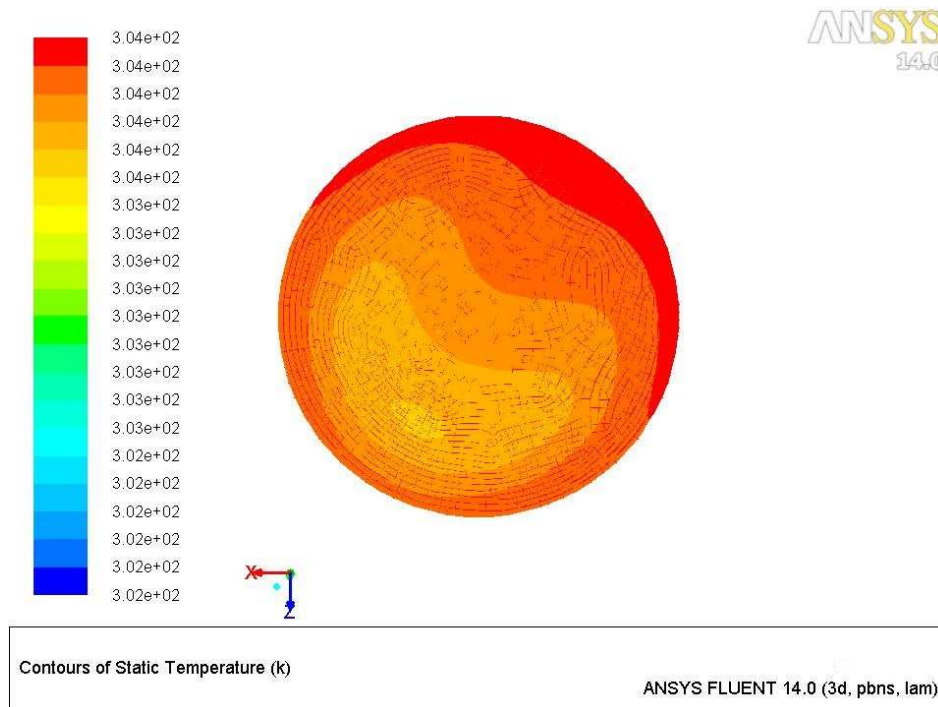


Figura 26. Campo de temperaturas en la región del fluido próxima a la placa caliente para $g = 0.098 \text{ m/s}^2$ y $\Delta T = 2.4 \text{ K}$. Las zonas de menor temperatura coinciden con el flujo frío descendente.

Se realiza un corte en el cilindro a lo largo de su sección media vertical, para observar el campo de temperaturas y velocidades en su interior.

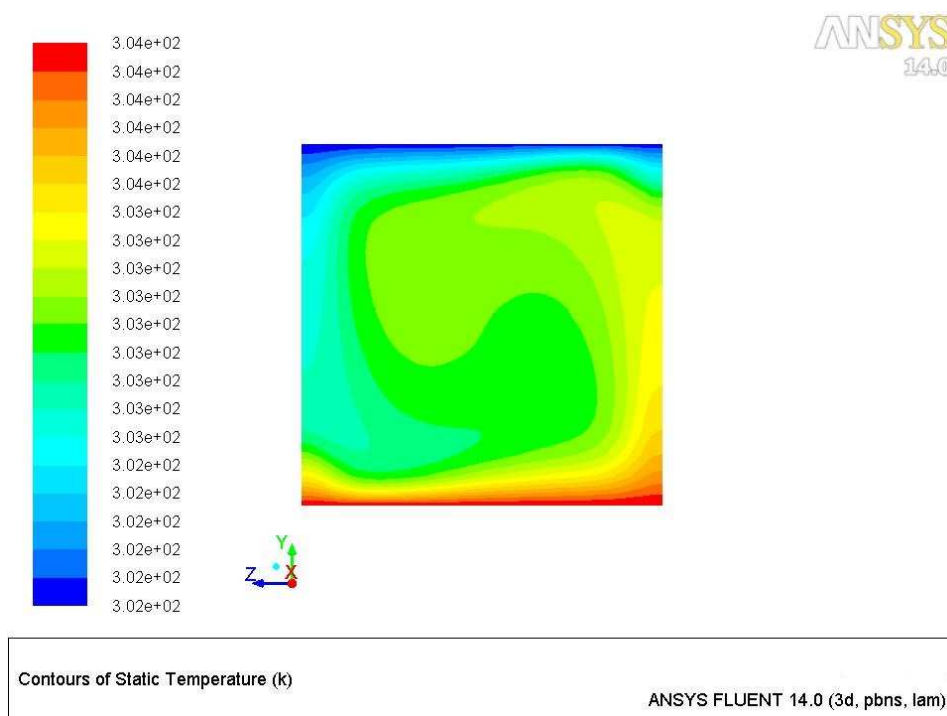


Figura 27. Campo de temperaturas en la sección media del fluido para $g = 0.098 \text{ m/s}^2$ y $\Delta T = 2.4 \text{ K}$.

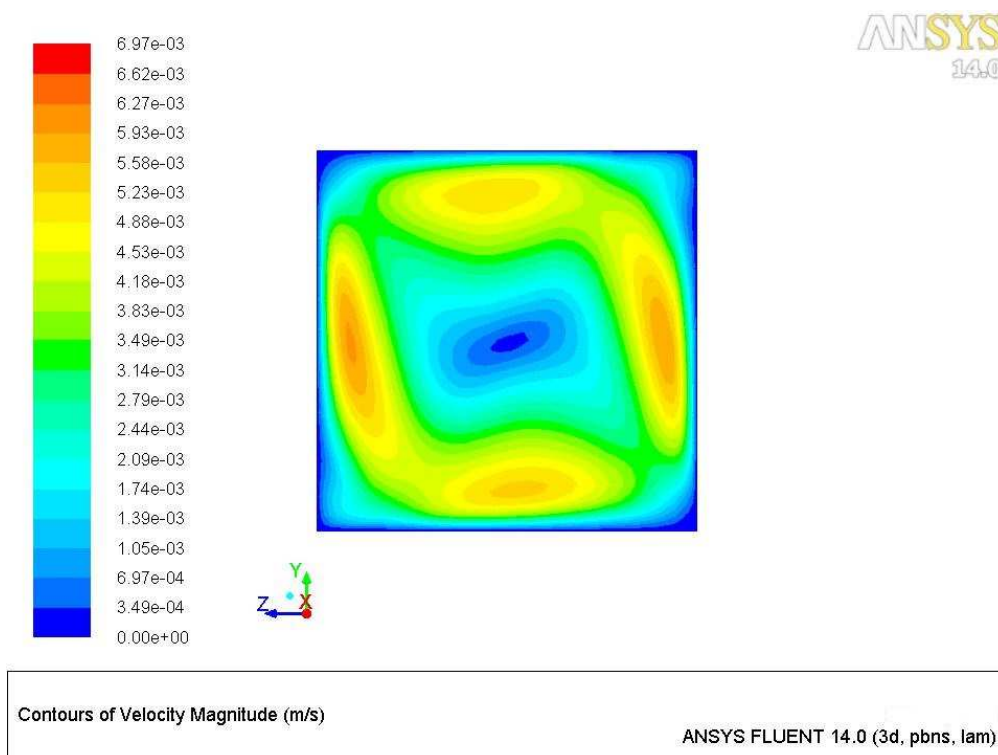


Figura 28. Campo de velocidades en la sección media del fluido para $g = 0.098 \text{ m/s}^2$ y $\Delta T = 2.4 \text{ K}$.

Se observa como el flujo de aire más caliente asciende por una de las regiones de la pared adiabática mientras que el flujo más frío desciende por la región opuesta. Se comprueba que estos caminos son aleatorios, dependientes de cómo se inicialice el campo fluido y las ecuaciones del modelo.

Respecto al campo de velocidades, se aprecian las zonas más rápidas de acuerdo a estos flujos ascendente y descendente. Un análisis más detallado demuestra que la velocidad radial es dominante a lo largo de la pared adiabática mientras que la velocidad axial domina en las regiones próximas a las placas horizontales. En el centro de la cavidad se produce un punto de remanso alrededor del cual se produce un rollo convectivo.

Una vez obtenida una solución para este caso, se aumenta el número de Rayleigh de $Ra \sim 3 \times 10^5$ a $Ra \sim 3 \times 10^6$ variando la aceleración de la gravedad a un valor de 0.98.

Para este caso, y según los resultados del **Barril de Ilmenau [17, 18, 19, 20, 21]**, se puede seguir considerando flujo laminar. No obstante, se hace difícil encontrar una solución estacionaria directamente.

Las simulaciones permitieron comprobar que, a partir de un valor $Ra \sim 3 \times 10^6$, el problema pasa a ser dependiente con el tiempo. Se acepta la hipótesis de que este transitorio coincide con las primeras evoluciones a régimen turbulento. Aunque el manual del usuario de Fluent cataloga la transición de flujo laminar a turbulento en la mayoría de flujos por flotabilidad a partir de 10^8 , para los casos aquí estudiados, se debe considerar esta transición a partir de 10^6 y total en 10^7 .

A partir de este punto se volvió indispensable estudiar el régimen transitorio antes de intentar hallar una solución estacionaria. Se hace converger de nuevo la solución, pero para

el régimen transitorio que ocurre entre las variaciones del Rayleigh. Tras un período de oscilaciones, la solución debería alcanzar el estado estacionario final.

Se define un paso de tiempo, *time step size* $\Delta t(s)$, igual a la cuarta parte de la constante de tiempo. Esta constante surge del tiempo característico del sistema.

$$\Delta t = \frac{t_c}{4} \quad (4.1)$$

$$t_c = \frac{h}{U_c} = \frac{H}{\sqrt{g \cdot \beta \cdot \Delta T \cdot h}}$$

Este proceso puede tomar muchísimo tiempo en converger adecuadamente, siendo conveniente a veces llegar hasta los 5000 pasos de tiempo. También se puede cometer el error de emplear un paso de tiempo mayor intentando encontrar antes la convergencia, por el contrario, esto puede dar lugar a divergencia.

Tras obtener una solución convergida en el paso de tiempo definido de acuerdo a los resultados previos, se simula el caso estacionario laminar ya estabilizado. De este modo, se comprueba que el flujo obtenido anteriormente sigue desarrollándose ante perturbaciones mayores.

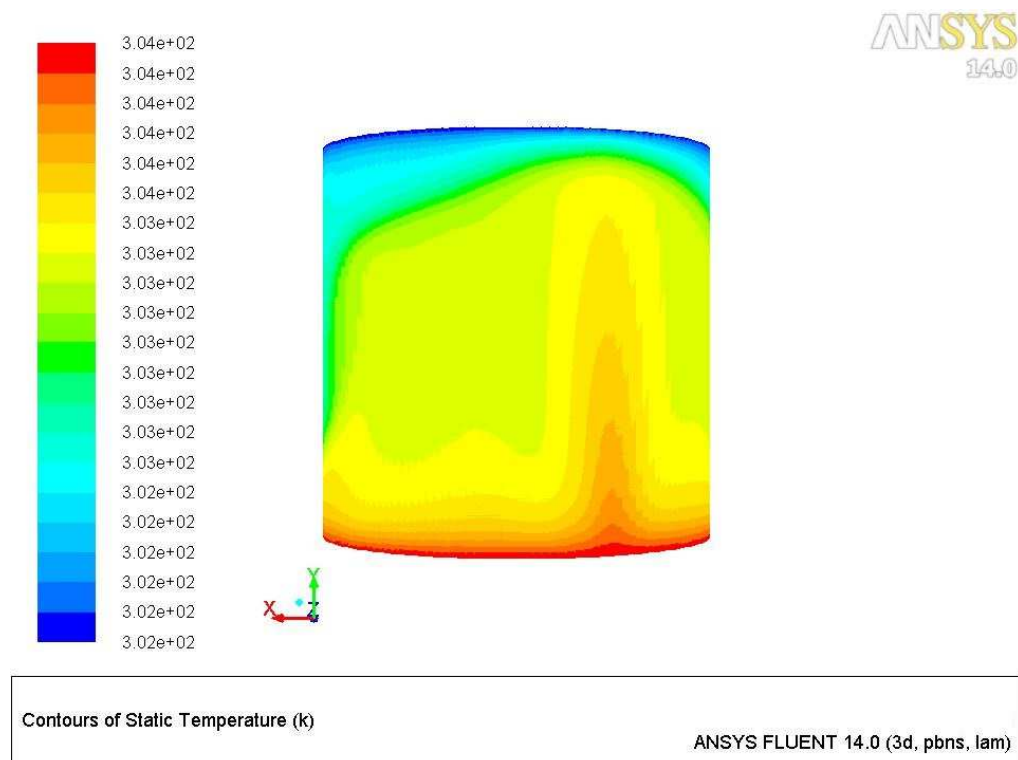


Figura 29. Campo de temperaturas a lo largo de la pared adiabática para $g = 0.98 \text{ m/s}^2$ y $\Delta T = 2.4 \text{ K}$. Se aprecia el flujo de aire más caliente ascendiendo.

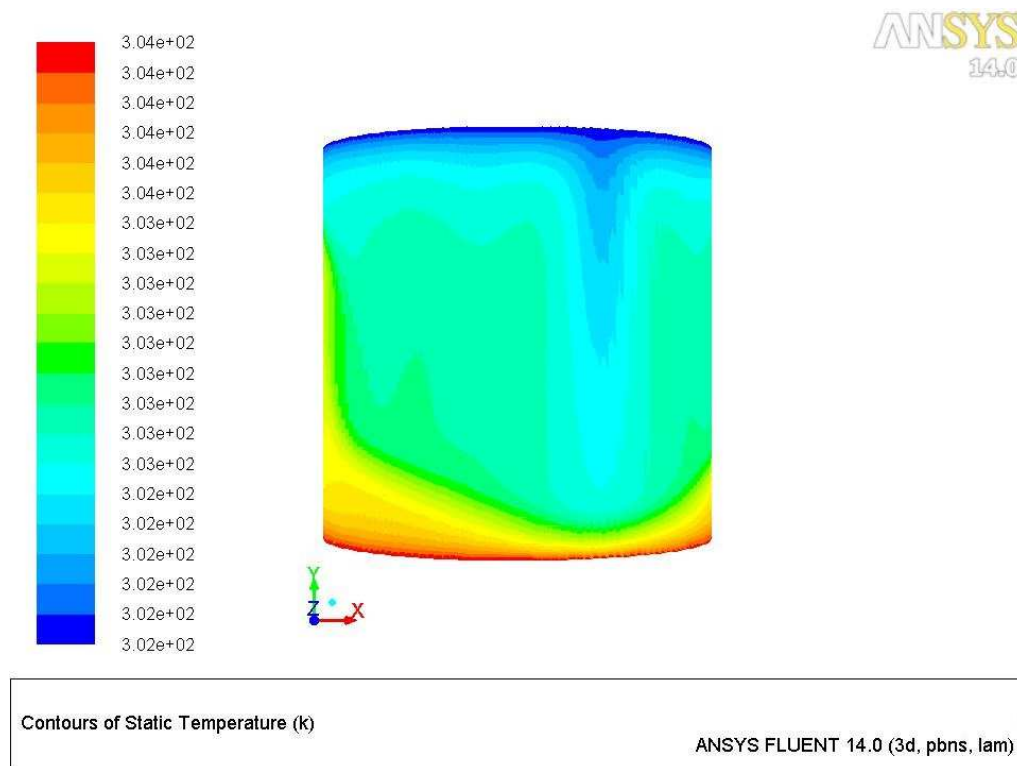


Figura 30. Campo de temperaturas a lo largo de la pared adiabática para $g = 0.98 \text{ m/s}^2$ y $\Delta T = 2.4 \text{ K}$. Se aprecia el flujo de aire más frío descendiendo.

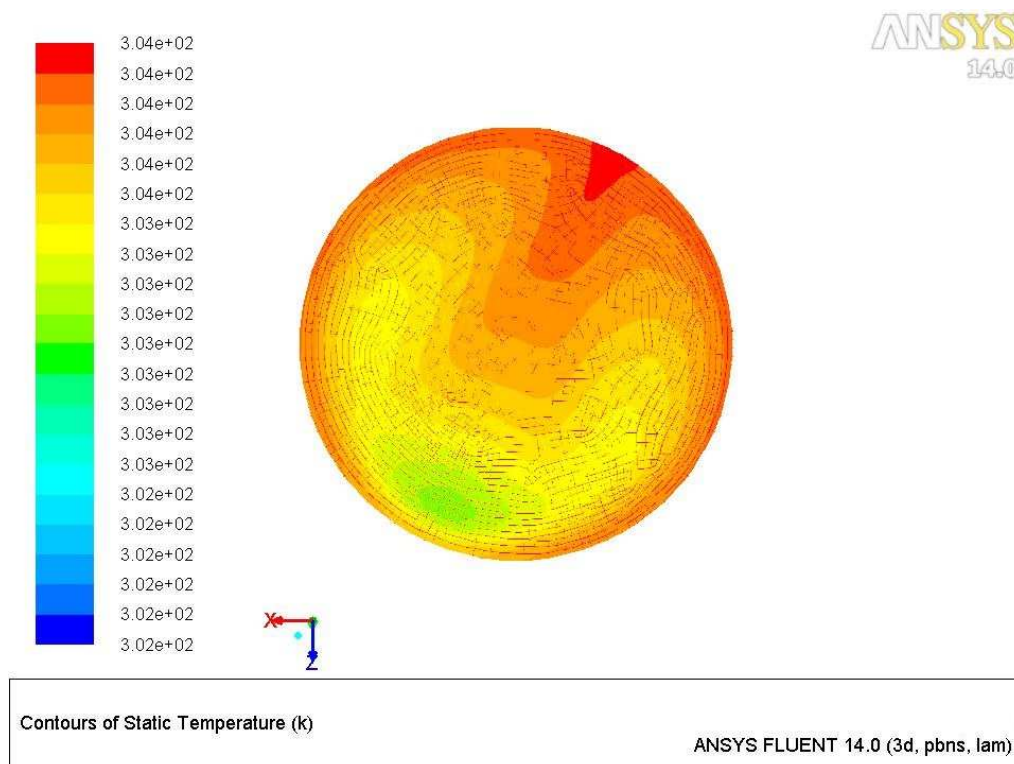


Figura 31. Campo de temperaturas en la región del fluido próxima a la placa caliente para $g = 0.98 \text{ m/s}^2$ y $\Delta T = 2.4 \text{ K}$. Las zonas de menor temperatura coinciden con el flujo frío descendente.

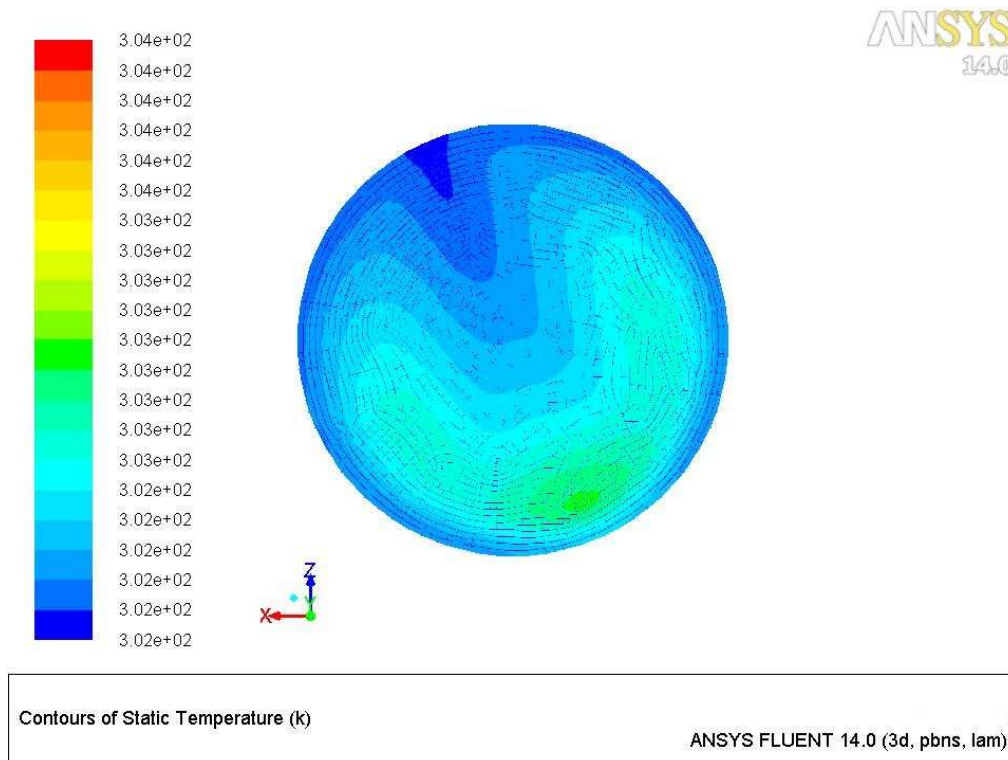


Figura 32. Campo de temperaturas en la región del fluido próxima a la placa fría para $g = 0.98 \text{ m/s}^2$ y $\Delta T = 2.4 \text{ K}$. Las zonas de mayor temperatura coinciden con el flujo caliente ascendente.

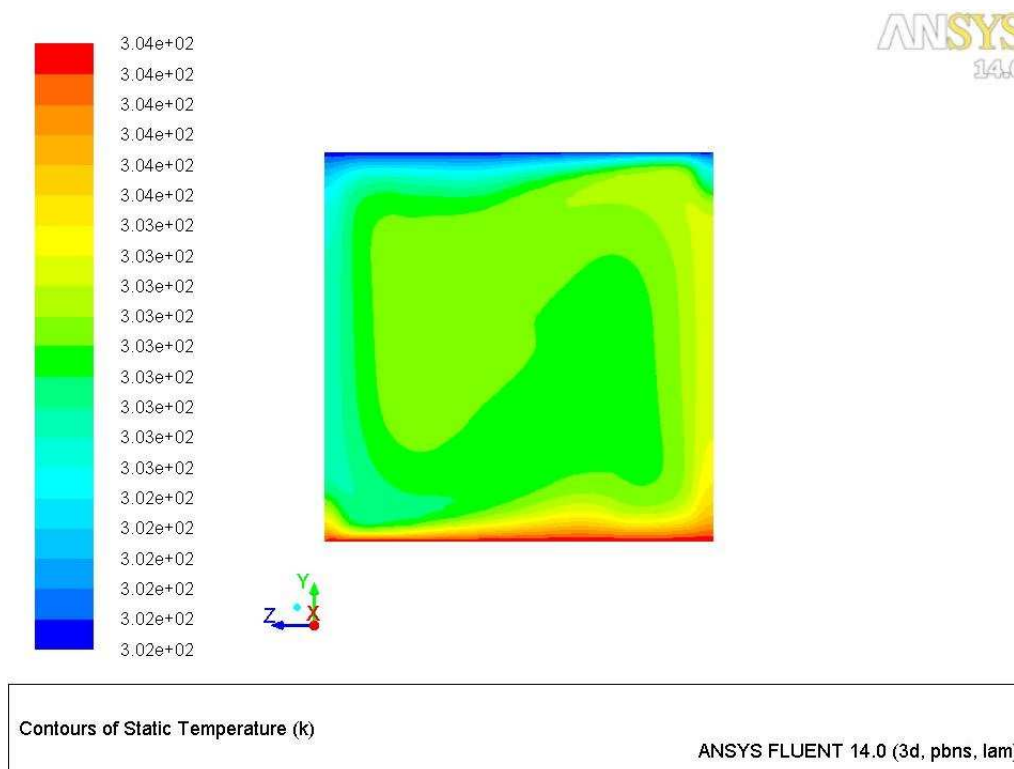


Figura 33. Campo de temperaturas en la sección media del fluido para $g = 0.98 \text{ m/s}^2$ y $\Delta T = 2.4 \text{ K}$.

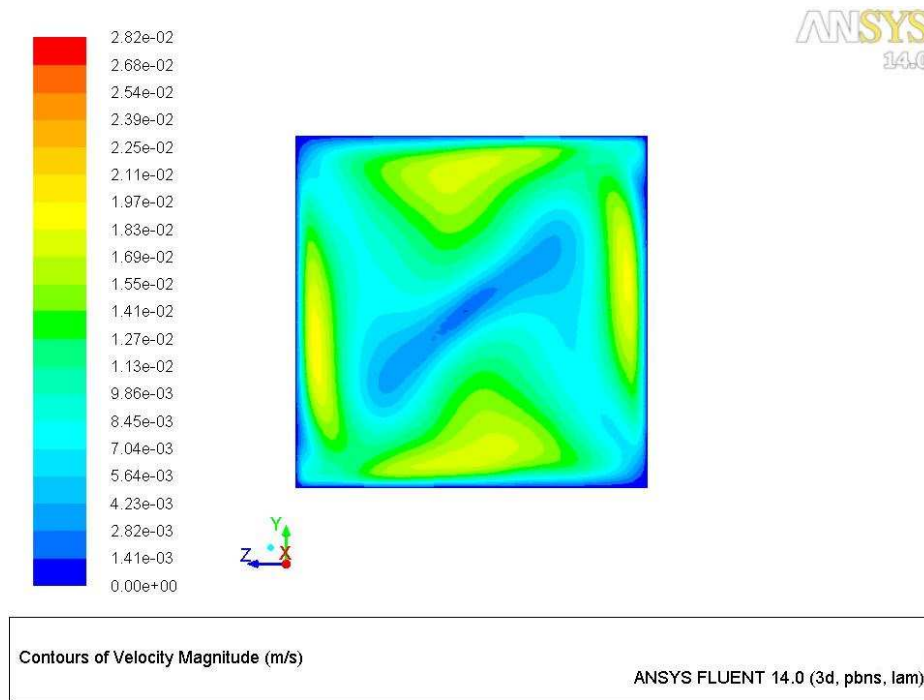


Figura 34. Campo de velocidades en la sección media del fluido para $g = 0.98 \text{ m/s}^2$ y $\Delta T = 2.4 \text{ K}$.

A partir de estos resultados, y aunque se intentaron probar varios modelos de turbulencia y se definieron distintos transitorios con diferentes frecuencias de oscilación, no se consiguió obtener una solución convergida para Ra mayores.

Se llegó a la conclusión de que la solución queda fuertemente dependiente con la malla, la geometría y las dimensiones, principalmente con la longitud de la pared vertical, como ya demostraron experimentos anteriores.

La imposibilidad de llegar a convergencia para los Ra deseados no permitió que se pudiesen comparar directamente los resultados experimentales con los simulados más allá del conocimiento empírico y teórico que se tiene del problema.

Así pues, se comprueba que se forma un rollo convectivo para la relación de aspecto unitaria. El camino que sigue este rollo se vuelve completamente imprevisible, dependiendo de cómo se inicialicen las ecuaciones. Además, el rollo formado no es el esperado. Los resultados experimentales demostraron que, para las condiciones recreadas, se formaba un rollo convectivo axilsimétrico formado por el flujo caliente ascendiendo por el eje de simetría y el flujo frío descendiendo por las paredes laterales. Esto no coincide con los resultados computacionales.

Sabiendo que la transición entre los modos axilsimétrico y no axilsimétrico ocurre alrededor de la relación de aspecto $\Gamma = 1.1$ para paredes laterales adiabáticas en la mayoría de los casos, según las investigaciones de **Charlson y Sani** (1970, 1971) [14,15] o **Stork y Müller** (1975) [51], se decide estudiar el modo axilsimétrico cortando el cilindro a lo largo de su sección media y desechar el estudio de la cavidad entera por el tiempo que conlleva y la inexactitud de los resultados.

5.1.1. Sección media axilsimétrica del cilindro

Estas simulaciones se desarrollan en un entorno bidimensional axilsimétrico, esperando obtener resultados en un tiempo de cálculo menor y sin necesidad de tantas iteraciones. Este caso permite, hasta cierto punto, extrapolar sus resultados para el resto del dominio fluido. Los cálculos que lleva a cabo el programa se reducen enormemente, ofreciendo una solución aproximada, más rápida y sencilla, del complejo fenómeno que puede tener lugar en un espacio tridimensional.

Para obtener un dominio bidimensional, se opta por estudiar la sección media vertical del cilindro o plano XY. Las dimensiones del nuevo dominio serán altura H y base R. Como eje de simetría se escoge el eje vertical, o eje X en el programa de simulación, sobre el que actúa la gravedad. Por tanto, la dimensión longitudinal que realmente se tendrá en cuenta en la simulación será el radio R, ya que el eje de simetría corta al diámetro D.

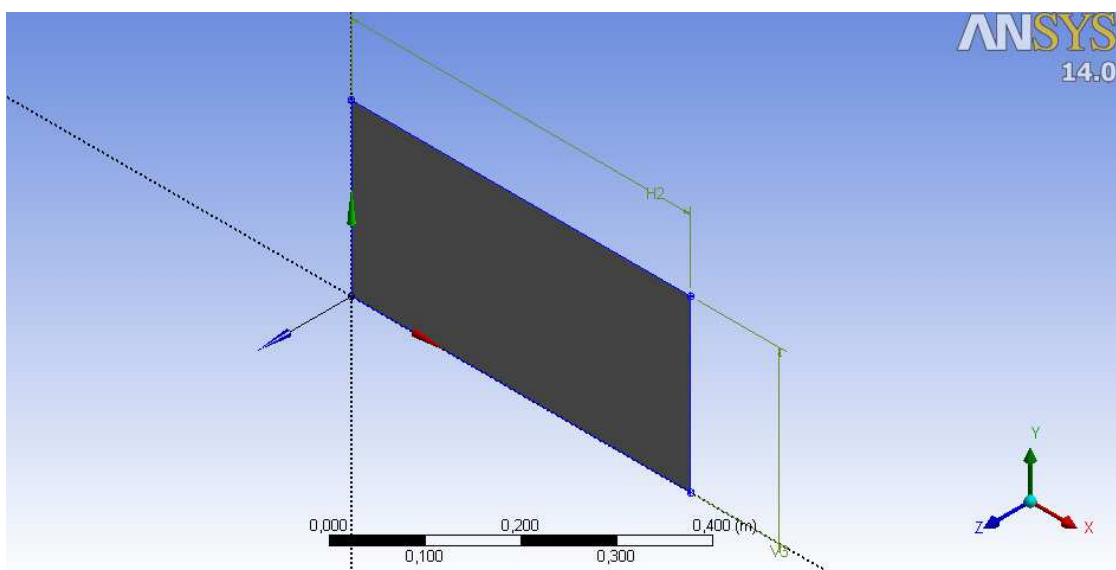


Figura 35. Cavity rectangular que coincide con la sección media del cilindro cortada por su eje de simetría.

Las fronteras del dominio, la pared lateral, las dos placas horizontales y el eje de simetría, son:

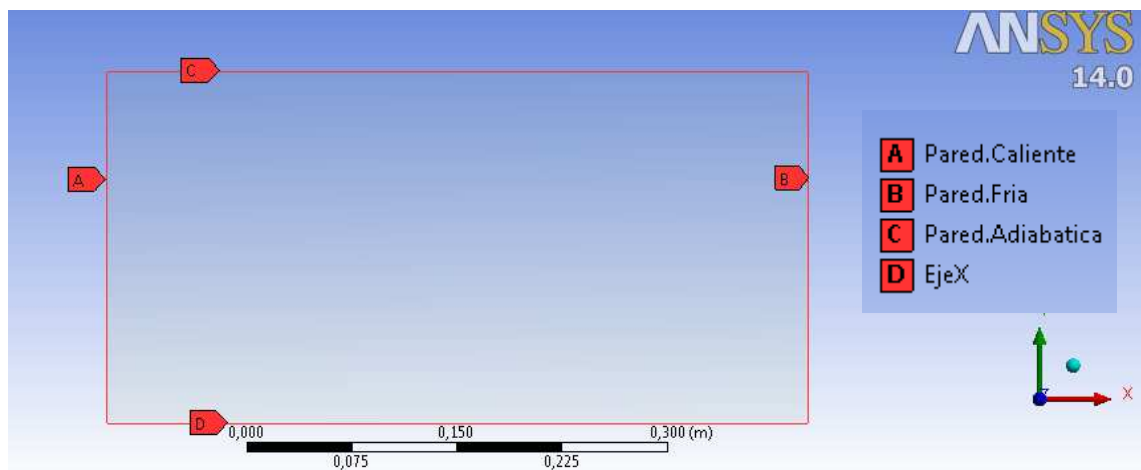


Figura 36. Fronteras del dominio bidimensional.

A la hora de mallar el dominio fluido, se seleccionan dos configuraciones. La primera será una primera aproximación, con un número moderado de celdas y sin entrar en excesivo detalle en las capas límites a lo largo de las paredes. Para esta malla se escoge un tamaño de celda de 0.01 m., proporcionando una malla de 25 x 50 celdas.

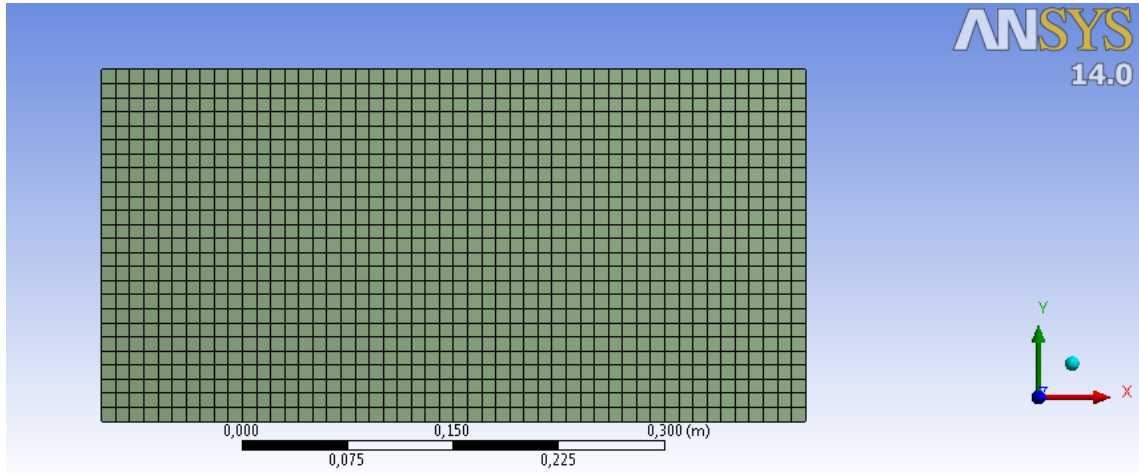


Figura 37. Malla inicial de 25 x 50 celdas.

Una vez obtenida una solución aproximada para los casos más simples, caracterizados por un número de Rayleigh bajo, se procede a refinar la malla para estudiar en profundidad los casos de flujo más complejo.

En estas configuraciones, tras resultados infructuosos, se decidió mantener el número de celdas y centrarse en obtener mejores soluciones para las paredes, refinando la malla a lo largo de las fronteras.

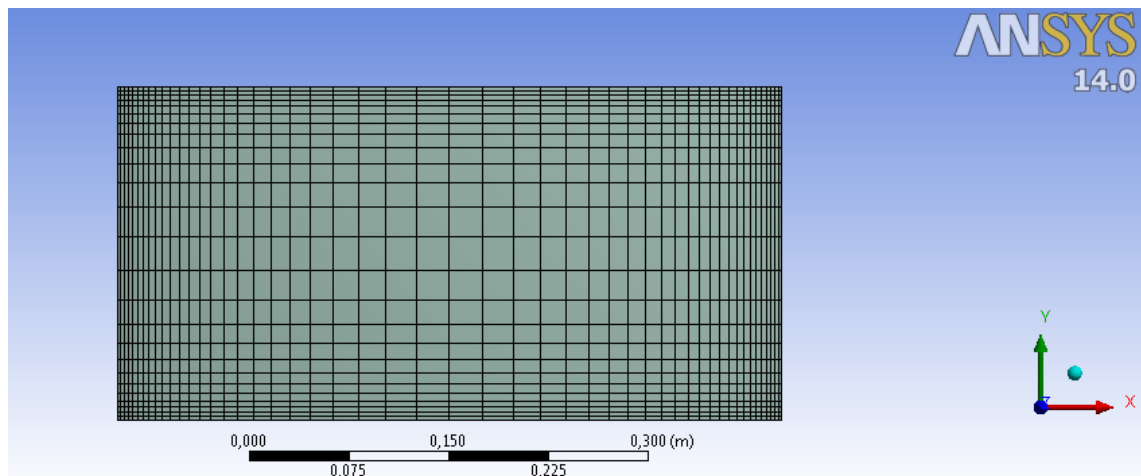


Figura 38. Malla de 25 x 50 celdas con refinamiento en las fronteras del dominio.

Para el caso más sencillo, $g=0.098$ y $Ra=3 \times 10^5$, se emplea la primera malla sin refinar de 25×50 celdas y un modelo laminar.

Se intentó obtener directamente una solución estacionaria, pero no fue posible. El comportamiento de los residuos era fluctuante, sin mostrar tendencia alguna a disminuir. Esto corroboró los resultados experimentales de anteriores investigadores, como **Wanschura, Kuhlmann y Rath (1966)** o **Boronska y Tuckerman (2006)**, que determinaron que la solución puede volverse dependiente con el tiempo a partir de valores del Rayleigh relativamente bajos.

Por ello, el papel de los transitorios es importante, y se debe estudiar primer el régimen transitorio intentando encontrar una solución estable si el flujo se desarrolla apropiadamente. Se define un paso de tiempo $\Delta t \sim 6$ s empleando las ecuaciones de (4.1).

Desarrollando la solución para un esquema de primer orden para momento y energía, se consigue converger la solución tras 1166 iteraciones o, lo que es lo mismo, 39 pasos de tiempo. Es decir, pasado un tiempo de flujo de 234 s., la perturbación se ha transmitido completamente a todo el sistema y la solución se vuelve estable.

Tras esto, bastan 20 pasos de tiempo bajo un esquema de segundo orden para la ecuación del momento para asegurar que la solución ha convergido.

La solución proporcionada, una vez asentado el flujo, es una distribución estratificada de la temperatura.

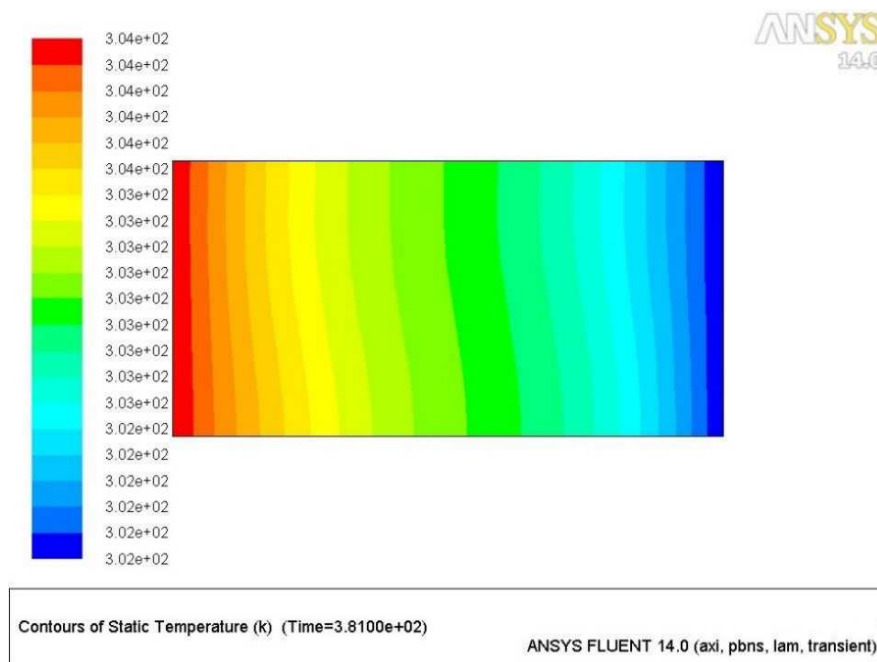


Figura 39. Distribución estratificada de la temperatura para $Ra \sim 10^5$.

Se toma este resultado como correcto dadas las simulaciones aportadas por **Cortés et al. [16]** en su trabajo de investigación sobre modelación CFD en cavidades cúbicas. Estudiando el régimen turbulento bidimensional en una cavidad cuadrada, encontraron que la distribución de temperaturas empleando el modelo k-w correspondía con un patrón

estratificado. Extrapolando estos resultados al caso axilimétrico, se acepta como válido que, en ambos casos, para poder alcanzar régimen estacionario bajo esas condiciones, la diferencia de temperaturas aplicada al flujo debe distribuirse primero de una forma escalonada estable.

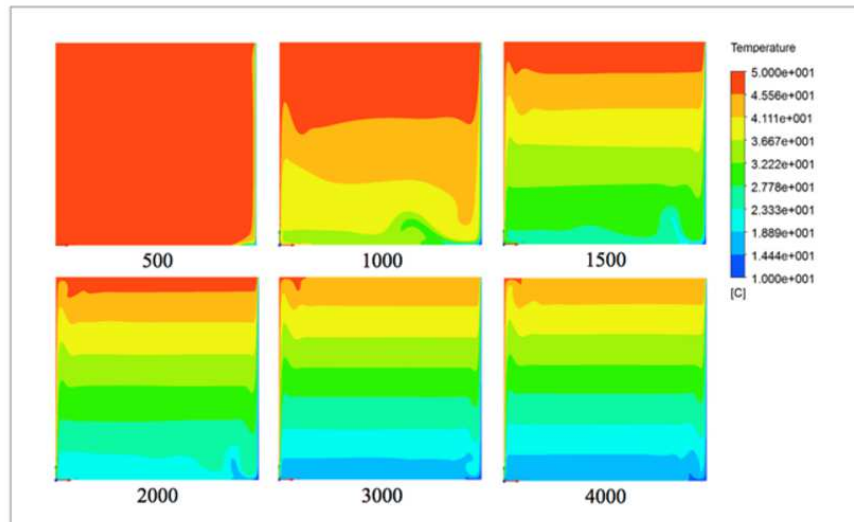


Figura 40. Resultados de Cortés et al. [16] para el fenómeno de convección natural turbulento en cavidades cuadradas. Se emplea el modelo standard k-w en régimen transitorio. El número debajo de cada recuadro representa el número de iteraciones corridas.

El análisis de los campos de velocidades muestra como las mayores velocidades se encuentran a lo largo del eje de simetría, por donde asciende el flujo caliente. El flujo frío, dependiente de la pared lateral, desciende por esta pared mucho más lentamente debido al mayor área de contacto.

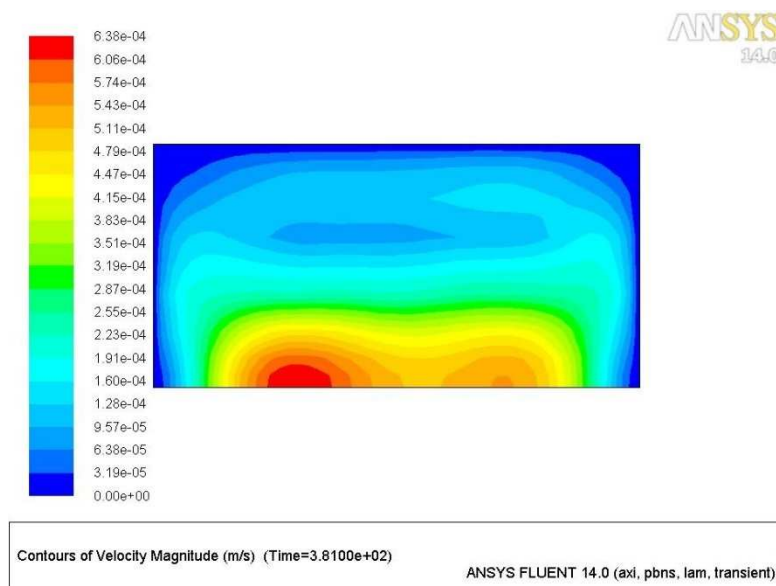


Figura 41. Campo de velocidad global para $Ra \sim 10^5$.

Si se representan los vectores de velocidad en la cavidad, se aprecia muy claramente el patrón de flujo creado, así como la distribución de velocidades máximas y mínimas. Se observa como la velocidad máxima se origina en el flujo caliente en el centro del eje de simetría.

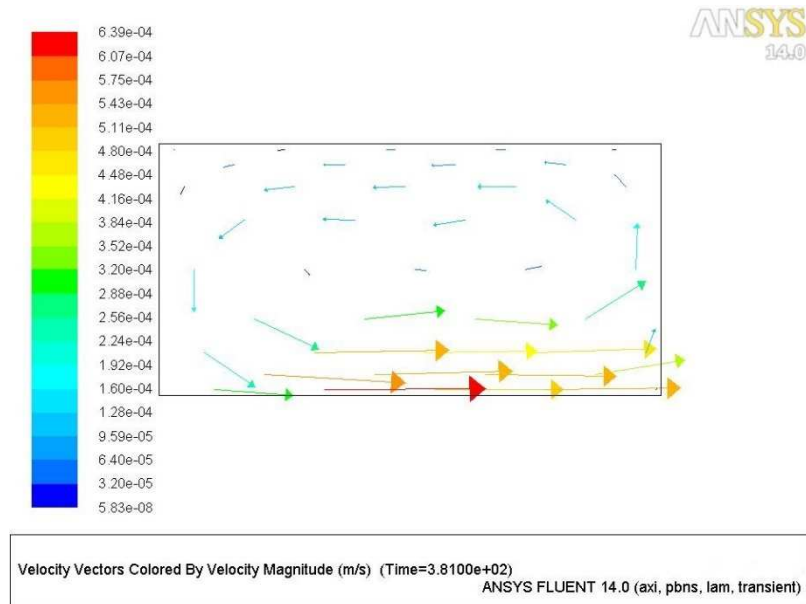


Figura 42. Representación de los vectores de velocidad global para $Ra \sim 10^5$ coloreados según la magnitud de la velocidad global de la Figura 41.

Si continuamos iterando la solución, se ve como la distribución de temperaturas empieza a desarrollarse proporcionalmente a los flujos de fluido caliente y frío.

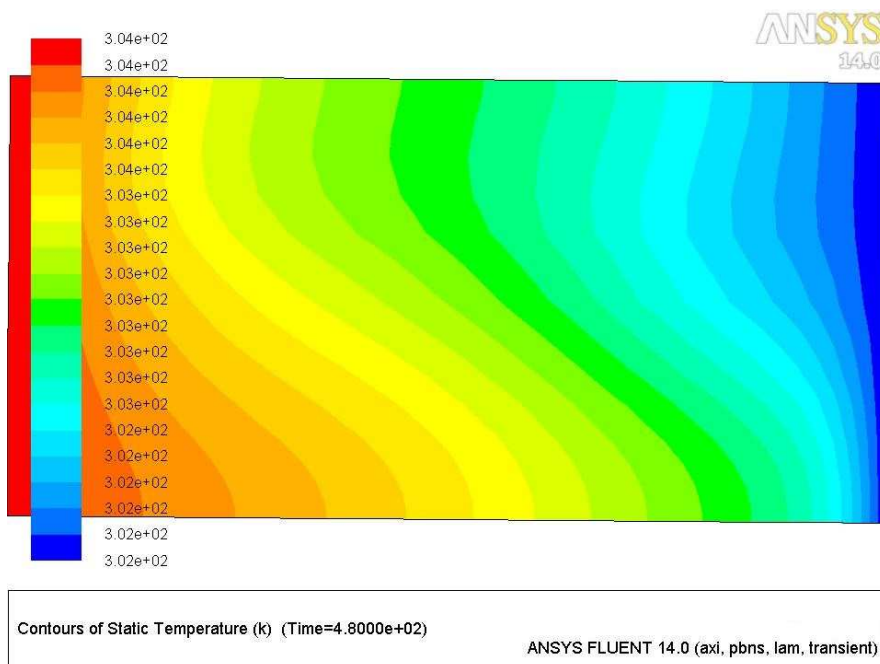


Figura 43. Distribución de la temperatura para $Ra \sim 10^5$ si se deja al flujo seguir desarrollándose tras alcanzar la estabilidad.

Para este caso, a partir de la solución transitoria, es posible obtener una solución convergida en régimen estacionario.

Se puede apreciar como la estratificación de temperaturas empieza a diluirse, proporcionando una transición suave de una temperatura a otra.

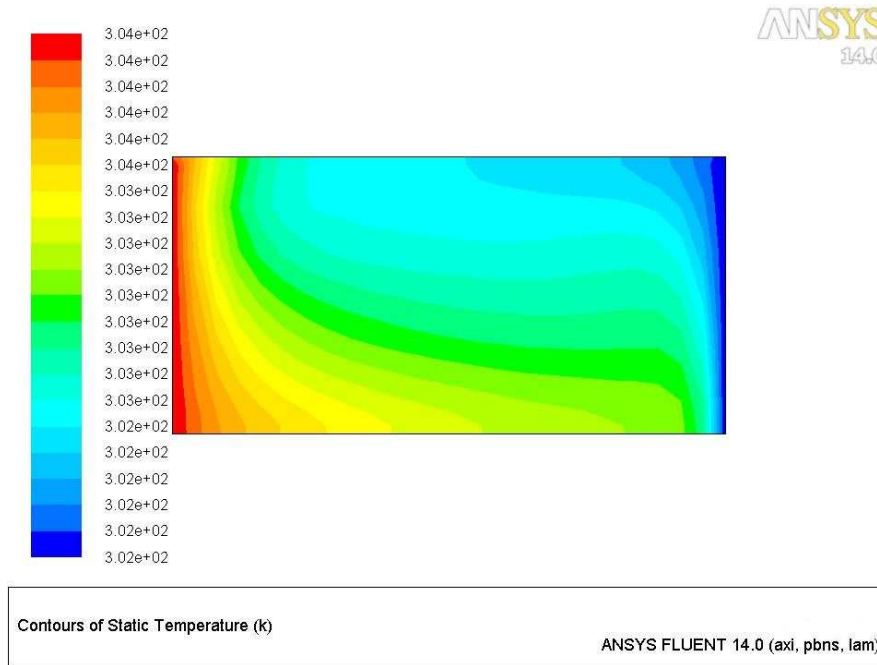


Figura 44. Distribución de la temperatura para $Ra \sim 10^5$ en régimen estacionario.

Se aprecia claramente que se genera un rollo convectivo en forma de toroide con el flujo caliente ascendiendo a lo largo del eje de simetría vertical y el flujo frío descendiendo por la pared lateral adiabática.

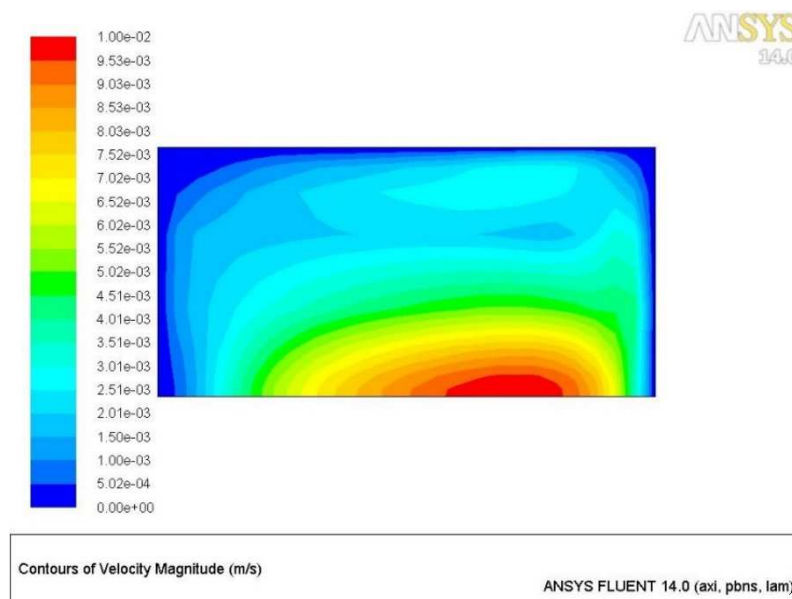


Figura 45. Distribución de la velocidad global para $Ra \sim 10^5$ en régimen estacionario.

La comparación de los perfiles de temperatura lo largo de la dirección radial con los resultados que, posteriormente, se han obtenido para el experimento de Betts y Bokhari (2000) [6] permiten concluir que esta solución es bastante acertada.

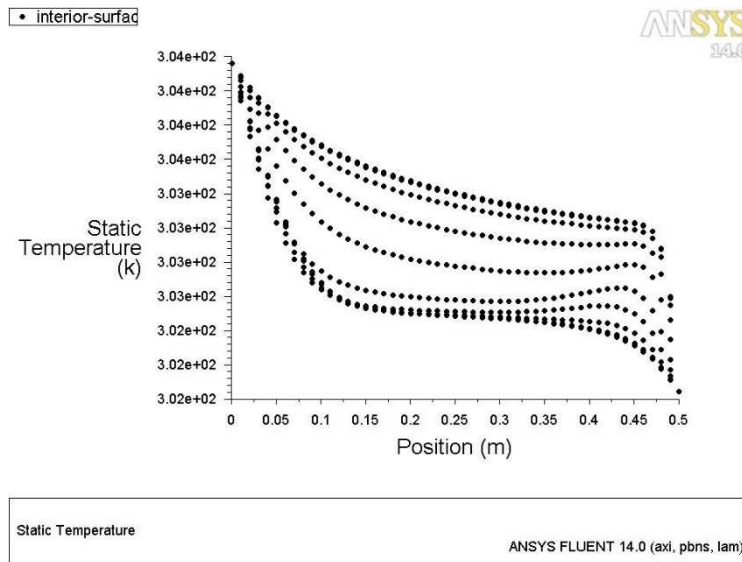


Figura 44. Distribución de la temperatura para $Ra \sim 10^5$ en régimen estacionario.

Lamentablemente, al aumentar el número de Rayleigh, no fue posible encontrar una solución estable convergida para el problema. Los perfiles que se obtenían, tanto de velocidad como de temperatura, al estudiar el modo transitorio eran muy inestables y no concordaban con los resultados esperados.

Demostró, de nuevo, ser un problema altamente dependiente con las dimensiones y el valor de Ra . La malla también juega un papel muy importante, pudiendo provocar la divergencia de los residuos si no se modela adecuadamente.

A pesar de analizar este modo transitorio a través de varios modelos de turbulencia de dos ecuaciones, asumiendo estado turbulento para $Ra \sim 10^6$, no se alcanzó la estabilidad para rangos temporales relativamente bajos. La simulación demostró necesitar altos tiempos de flujo para llegar a propagarse adecuadamente y alcanzar una estabilidad.

En ningún caso se pudo obtener soluciones estacionarias para Ra mayores.

Así pues, tras estos resultados, se decidió no seguir simulando cavidades cilíndricas, pues su desarrollo demostró ser largo y dificultoso, pasando a estudiar cavidades rectangulares según Betts y Bokhari. Este cambio de problema se debe al objetivo principal de este trabajo que es proporcionar un fenómeno de convección natural en régimen turbulento asequible de simular y estudiar. Ello no quiere decir que se busque el problema más fácil, sino que se pretende dar ciertas pautas y configuraciones del modelo para que una simulación de flujos complejos pueda llevarse a cabo sin tomarse un tiempo excesivo.

Los largos tiempos que conllevaban las simulaciones anteriores determinaron su exclusión en el camino hacia la meta final.

5.2. Cavidad rectangular altamente esbelta

Como ya demostraron Betts y Bokhari [6], la simplificación a la sección media para el estudio de una cavidad cúbica altamente esbelta es acertada. Los campos de velocidad y temperatura demostraron ser casi bidimensionales, excepto cerca de las paredes delantera y trasera, y antisimétrico a lo largo de la diagonal. Por ello, para este caso, se estudia solamente el caso bidimensional, simplificando enormemente los cálculos que debe desarrollar el software.

Se simula, por tanto, el flujo turbulento que se produce en una cavidad cerrada rectangular de dimensiones 2.18 x 0.076 m. La diferencia de temperaturas se aplica entre sus paredes verticales, fijando dos diferencias diferentes de 19.6°C y 39.9°C para poder estudiar dos números de Rayleigh, $Ra = 0.86 \times 10^6$ y $Ra = 1.43 \times 10^6$, respectivamente. En ambos casos, el número de Prandtl se sitúa en torno a 0.7. En estas condiciones, el régimen desarrollado es turbulento con un número de Reynolds relativamente bajo.

De acuerdo a la **Figura 16.B.** y a los resultados experimentales ya mencionados, la geometría a simular es la sección media correspondiente a una cavidad cúbica altamente esbelta.

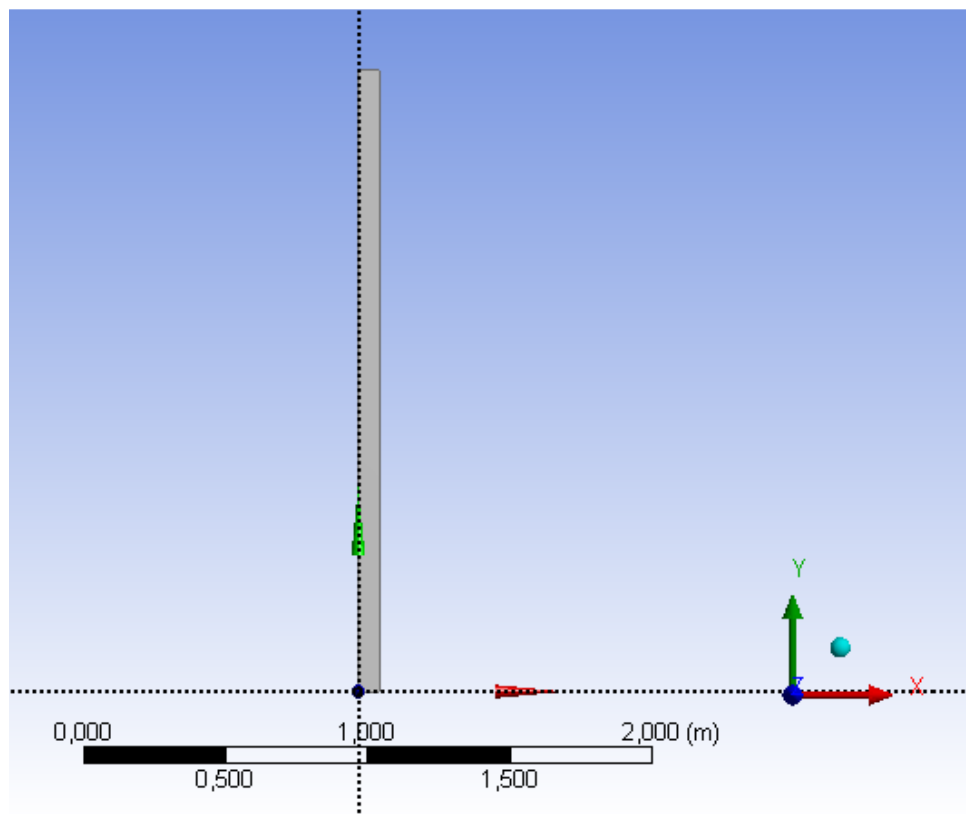


Figura 45. Geometría desarrollada en el software de simulación para una cavidad rectangular altamente esbelta.

Para todos los Rayleigh y modelos estudiados, se empieza con una malla de 50 x 100 celdas sobre la que posteriormente se realizarán refinamientos. Más adelante, se mostrarán datos para distintos mallados, representando la dependencia de la malla con los resultados.

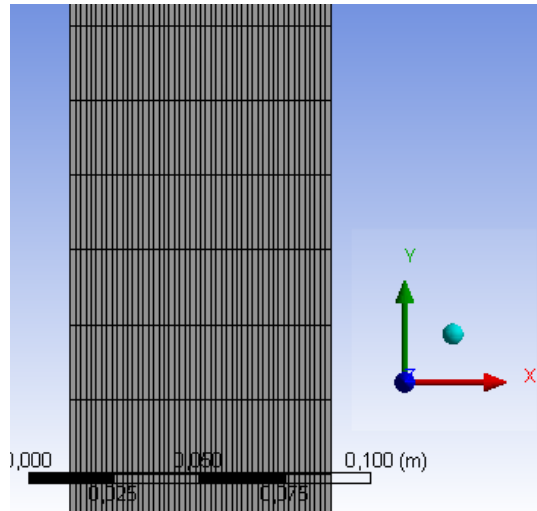


Figura 46. Ampliación de una pequeña región de la malla inicial de 50 x 100 celdas, donde se aprecia la geometría rectangular de las mismas y su distribución a lo largo de los dos ejes.

5.2.1. Cavity rectangular, $Ra = 0.86 \times 10^6$

Este caso tiene lugar bajo un Ra relativamente cercano al crítico, pero se puede considerar flujo turbulento completamente desarrollado.

Se aplica una diferencia de temperaturas de $\Delta T = 19.6 \text{ }^\circ\text{C}$, fijando una temperatura de la pared fría ($x = 0$) de $T_C = 288.1 \text{ K}$ y para la pared caliente ($x = W$) de $T_H = 307.7 \text{ K}$. Las paredes verticales son adiabáticas. Las cuatro paredes cumplen la condición de no deslizamiento o no slip para la velocidad.

La temperatura media inicial a la que se encuentra el flujo, así como la que se fija como valor de referencia para calcular las propiedades del sistema, será $T_0 = \frac{T_H + T_C}{2} = 297.9 \text{ K}$. Esta será la temperatura de operación (Operating temperature) que se introduce en el programa. Para la determinación de la densidad se escogió la opción Boussinesq, fijando un coeficiente de expansión térmica $\beta = 1/T_0 = 0.003357 \text{ (K}^{-1}\text{)}$.

Se estudia el caso estacionario plano que tiene lugar bajo una aceleración de la gravedad igual a $g = 9.8 \text{ m/s}^2$ aplicada sobre el eje vertical en sentido descendente. Para obtener una solución al problema, se emplearon distintos modelos de turbulencia de dos ecuaciones, así como uno de cuatro ecuaciones, siendo innecesario estudiar el caso laminar, pues la simulación bajo estas condiciones convergía fácilmente. Los resultados obtenidos se comparan con los valores experimentales de Betts y Bokhari para determinar qué elección de modelo es la adecuada.

Se activa la ecuación de la energía y se seleccionan los siguientes modelos para la viscosidad:

- *k- ϵ standard*, dos ecuaciones.
- *k- ϵ RNG*, dos ecuaciones.
- *k- ϵ realizable*, dos ecuaciones.
- *k- w standard*, dos ecuaciones.
- *k- w SST*, dos ecuaciones.
- *Transitional SST*, cuatro ecuaciones.

Respecto a los métodos de discretización, se comprueba que las opciones por defecto arrojan buenos resultados, (standard para la presión, y un esquema de segundo orden para la ecuación del momento y de la energía, second order upwind) sin tener que variar estos métodos. De igual modo, tampoco es requerido modificar criterios de convergencia o factores de relajación, dejando los valores por defecto del programa.

Para analizar mejor los campos de temperatura y los perfiles de velocidad, se fijaron varias rectas longitudinales de referencia a lo largo del eje vertical adimensionalizado, desde regiones cercanas a la capa límite de la pared inferior hasta la región media de la cavidad.



Figura 47. Líneas de referencia longitudinales para varios valores del eje vertical, $y/H = 0.05$, $y/H = 0.1$, $y/H = 0.3$ e $y/H = 0.5$, respectivamente.

❖ Resultados para los modelos k- ϵ

Dentro de la configuración de estos modelos, se escogen para los tres la opción *Enhanced Wall Treatment* como tratamiento cerca de las paredes. Este tratamiento proporciona soluciones suficientemente fiables para la capa límite sin necesidad de refinar la malla cerca de las paredes en primera instancia. Dentro de sus opciones, se escogen únicamente efectos térmicos o *thermal effects* para el tratamiento cerca de las paredes.

Por último, se seleccionan las opciones *Viscous heating* y *Full Buoyancy Effects* para terminar de modelar el problema. Estas dos últimas condiciones determinan que el problema está dominado por las fuerzas de flotabilidad pero que, aun así, los efectos de la viscosidad se han de considerar en ciertos aspectos.

La convergencia con los tres modelos fue fácil de alcanzar, siendo necesarias no más de 500 iteraciones.

Se comparan las distribuciones de temperatura y de velocidad vertical a lo ancho de la cavidad con los valores experimentales de Betts y Bokhari para la elección del modelo más adecuado.

Se emplean para ello las líneas de referencia que se habían creado a lo ancho de la cavidad en varias alturas; de este modo, se pueden comparar cuantitativamente los perfiles en varios puntos del campo fluido.

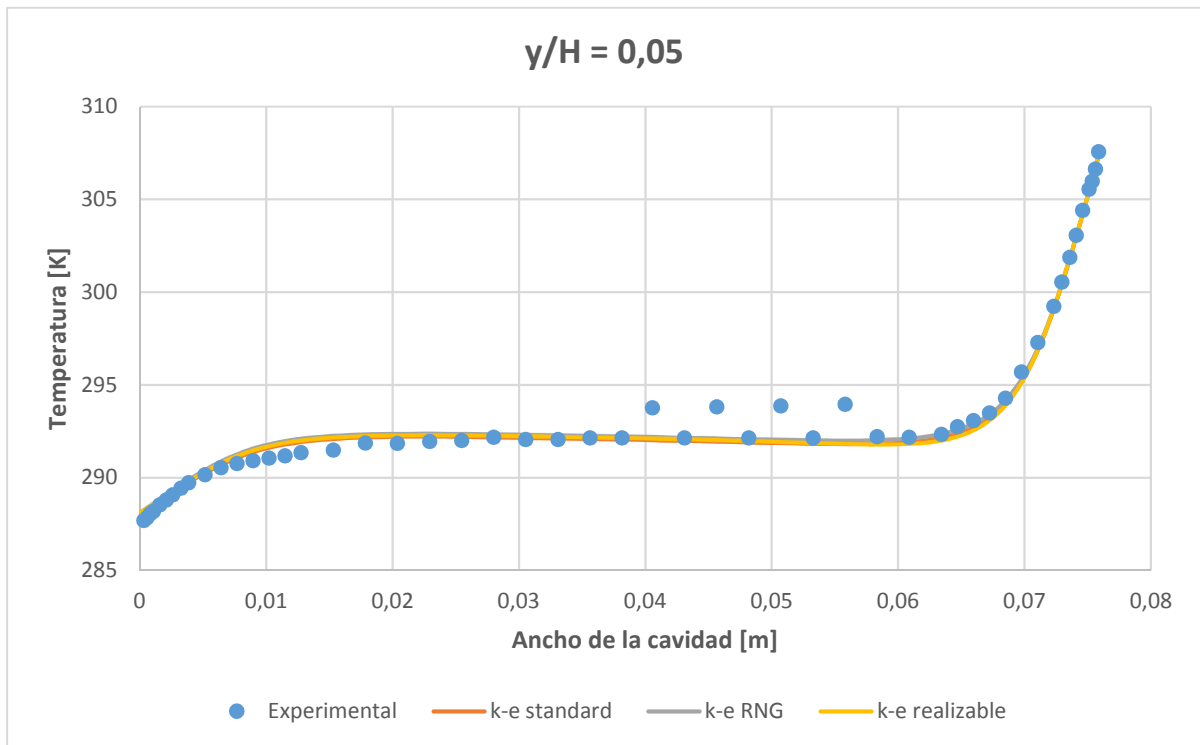


Figura 48. Perfil de temperaturas a lo largo de la recta $y/H = 0.05$ para una malla de 50×100 celdas y modelos $k-\epsilon$.

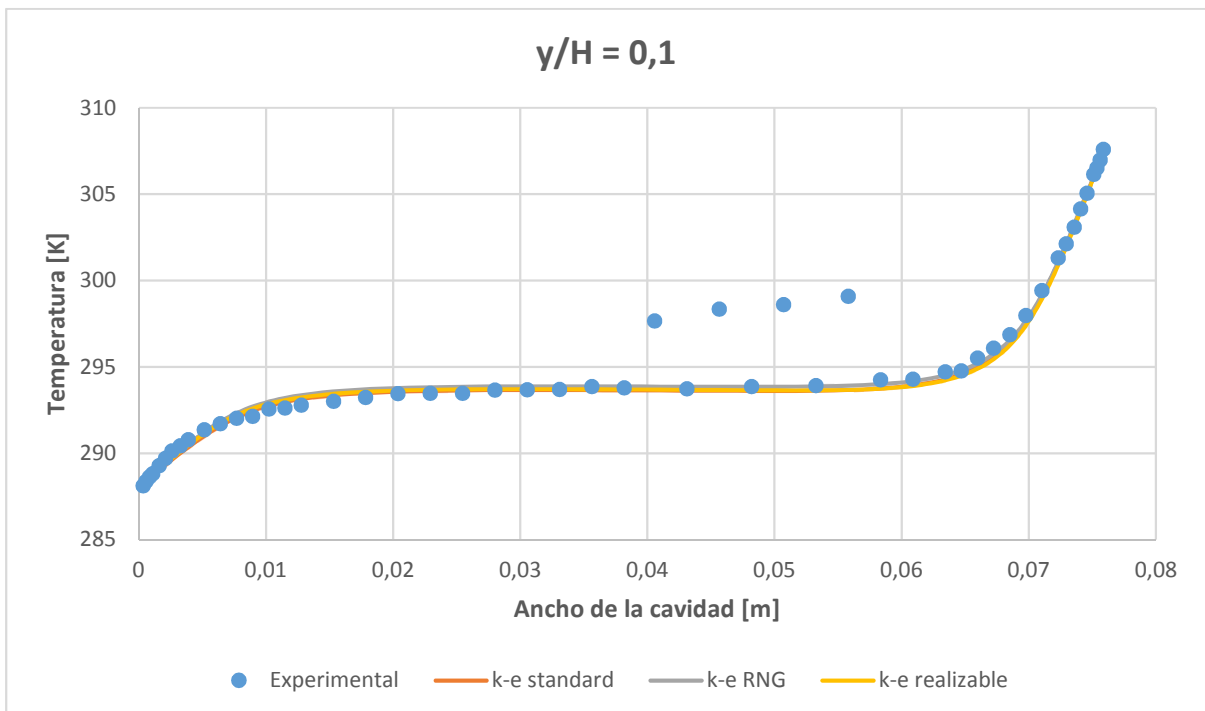


Figura 49. Perfil de temperaturas a lo largo de la recta $y/H = 0.1$ para una malla de 50×100 celdas y modelos $k-\epsilon$.

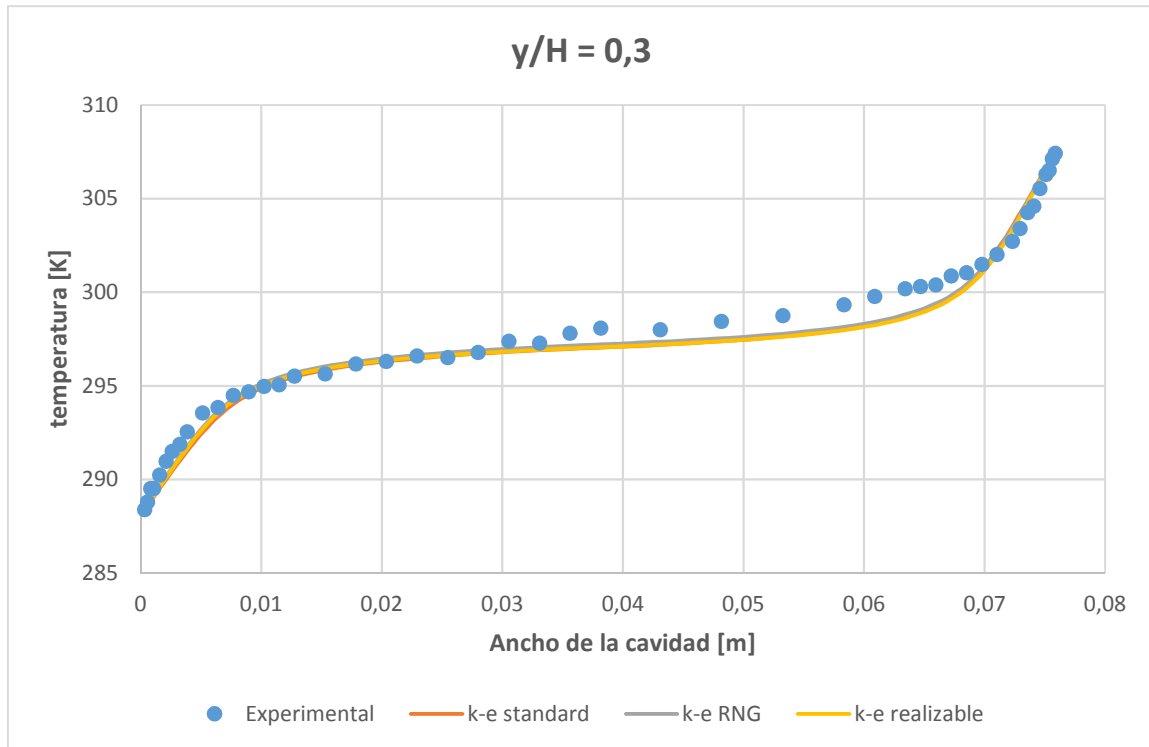


Figura 50. Perfil de temperaturas a lo largo de la recta $y/H = 0.3$ para una malla de 50×100 celdas y modelos $k-\epsilon$.

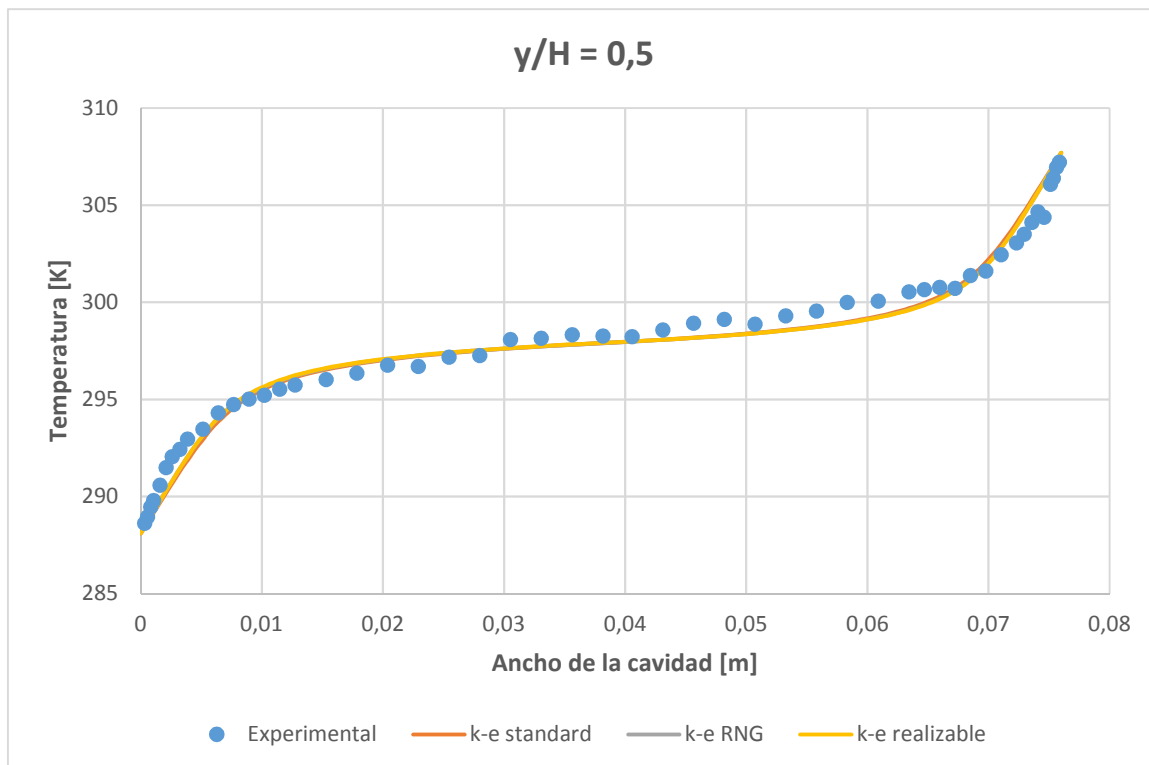


Figura 51. Perfil de temperaturas a lo largo de la recta $y/H = 0.5$ para una malla de 50×100 celdas y modelos $k-\epsilon$.

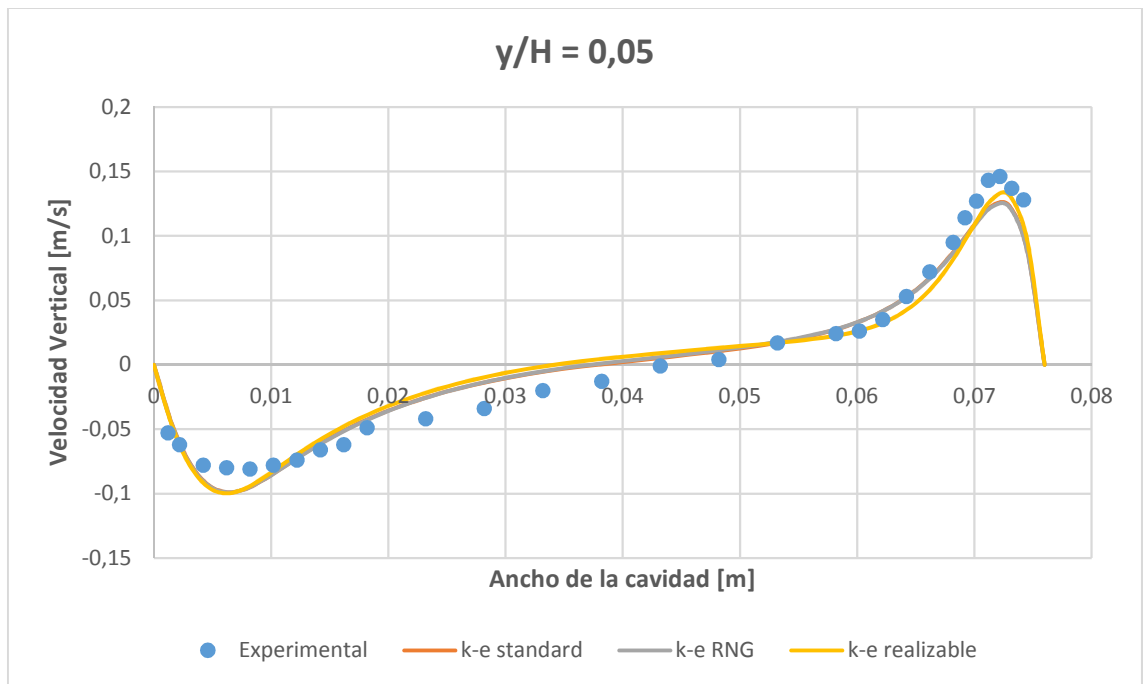


Figura 52. Distribución de velocidad vertical a lo largo de la recta $y/H = 0.05$ para una malla de 50×100 celdas y modelos $k-\epsilon$.

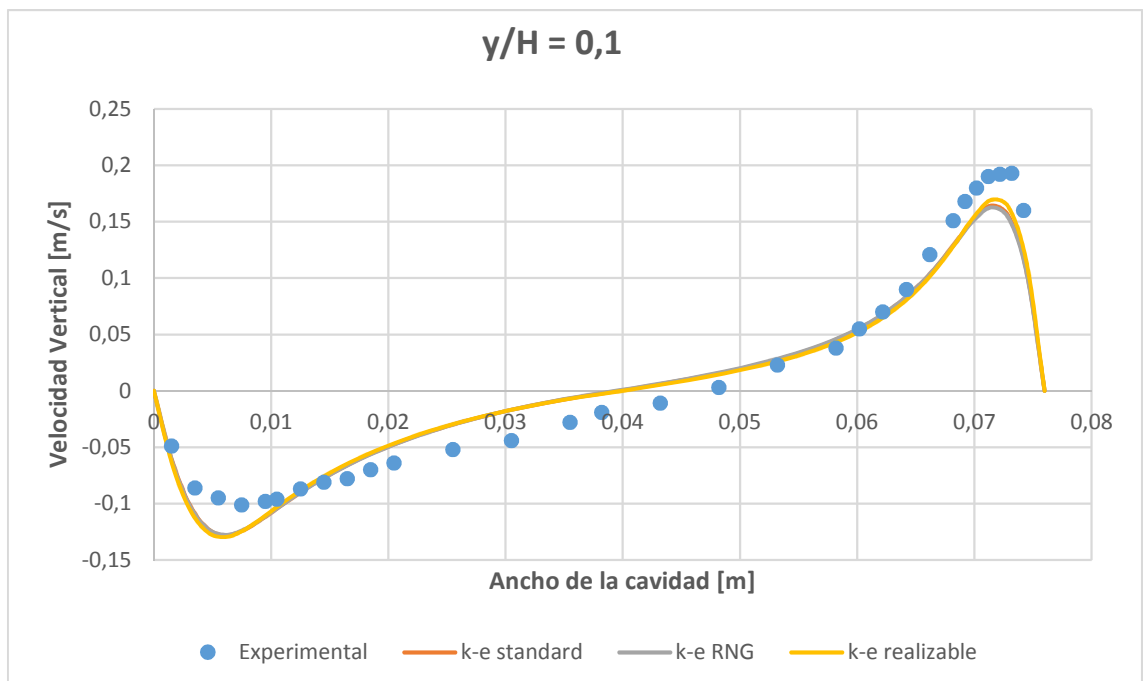


Figura 53. Distribución de velocidad vertical a lo largo de la recta $y/H = 0.1$ para una malla de 50×100 celdas y modelos $k-\epsilon$.

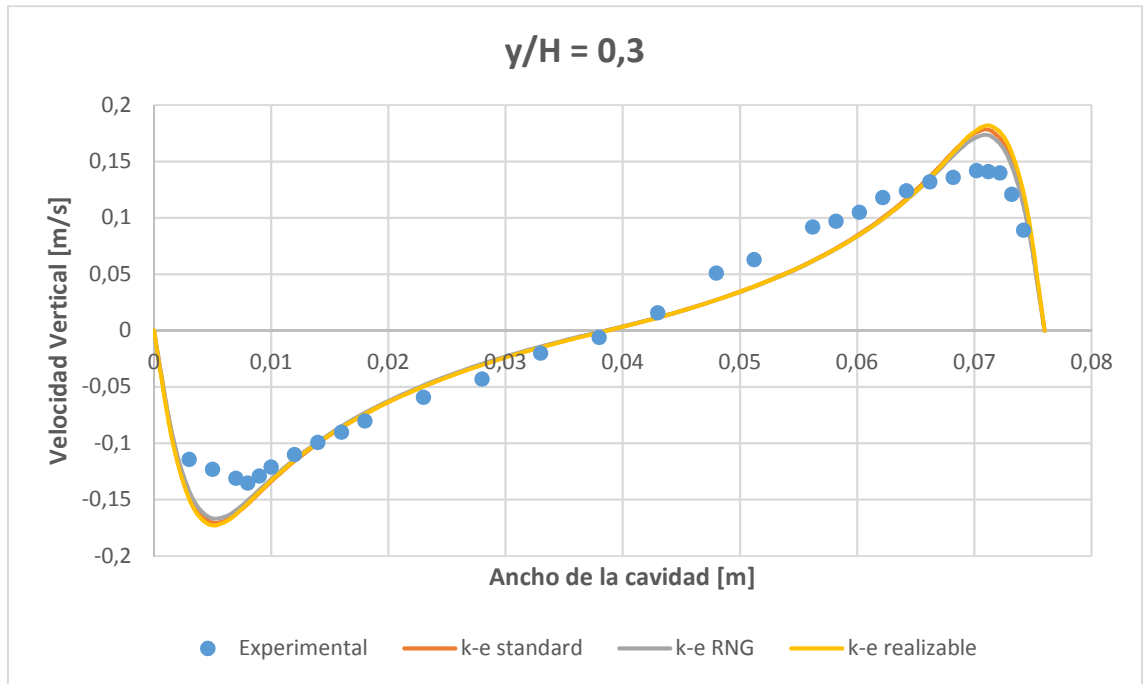


Figura 54. Distribución de velocidad vertical a lo largo de la recta $y/H = 0.3$ para una malla de 50×100 celdas y modelos $k-\epsilon$.

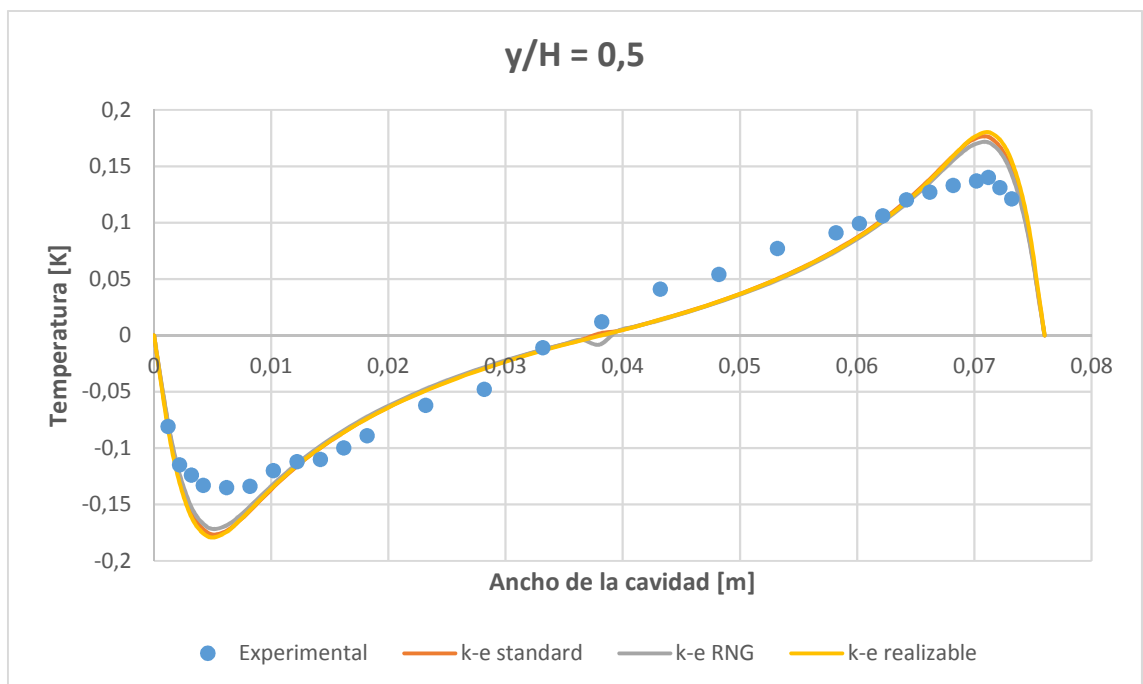


Figura 55. Distribución de velocidad vertical a lo largo de la recta $y/H = 0.5$ para una malla de 50×100 celdas y modelos $k-\epsilon$.

Los resultados demuestran que los modelos k- ϵ otorgan una resolución del campo de temperaturas muy precisa, siendo bastante aceptable su solución para la distribución de la velocidad. Se observa una buena predicción tanto para la región cercana a las paredes isotérmicas como para el campo medio.

Dentro de las tres opciones del modelo k- ϵ , las tres arrojan resultados muy parecidos. La tendencia para la velocidad en el campo medio y el campo de temperaturas en todo el dominio es igual en las tres opciones. Tan solo presentan diferencias a la hora de resolver las ecuaciones en la región entre la pared inferior adiabática y la pared caliente. El modelo que otorga mejores resultados es realizable k- ϵ , pues de los tres es el que mejor resuelve este punto de conflicto.

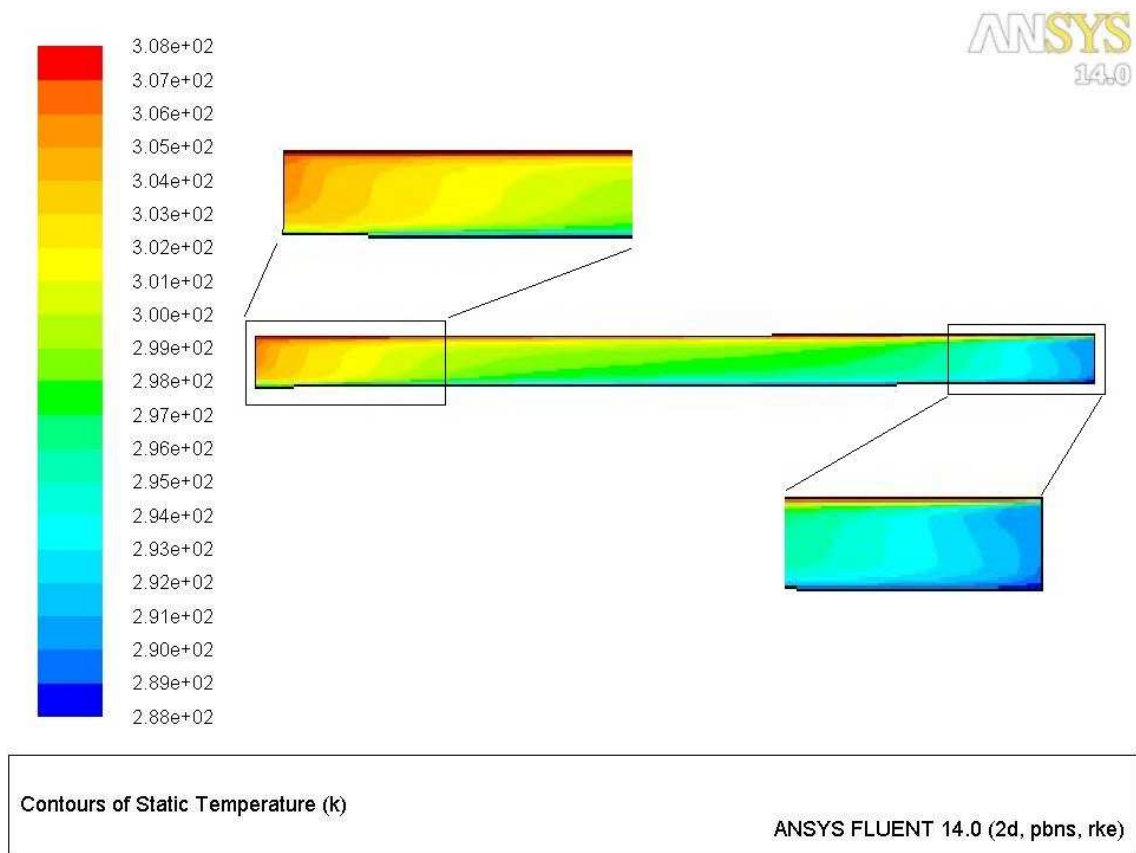


Figura 56. Campo de temperaturas con el modelo realizable k- ϵ y una malla de 50 x 100 celdas.
 $Ra = 0.86 \times 10^6$.

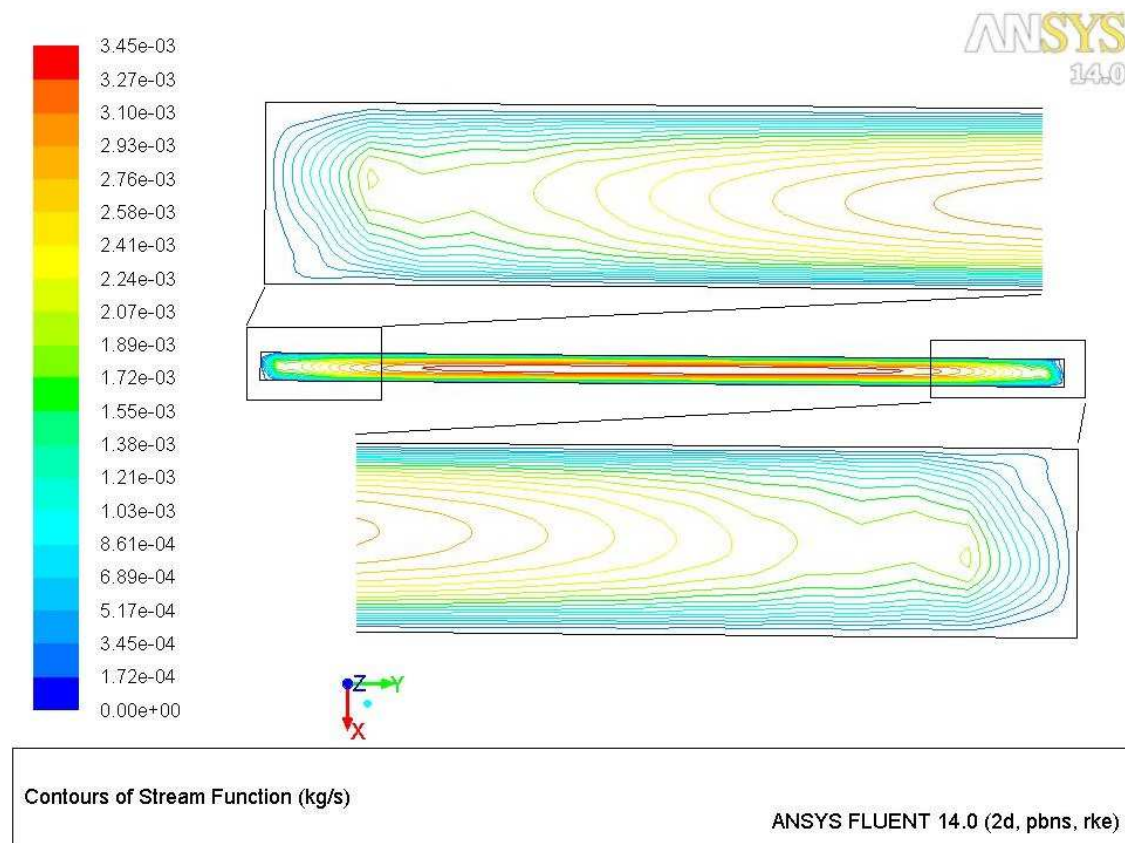


Figura 57. Líneas de corriente con el modelo realizable $k-\epsilon$ y una malla de 50×100 celdas. $Ra = 0.86 \times 10^6$.

Se aprecia como las líneas de corriente se juntan entre el campo medio y la región próxima a las paredes, generando un rollo a lo largo de las paredes de la cavidad. A lo largo de estas líneas, la velocidad es máxima.

El centro del rollo, coincidente con gran parte del campo medio del fluido, se caracteriza por ser un punto de remanso alrededor del cual se crea el flujo.

Es notable ver como se podía haber refinado la malla en las zonas próximas a las paredes horizontales. En estas regiones, las líneas de corriente se distorsionan como efecto de la alta turbulencia y el grosor de la capa límite. Aunque la malla definida da buenos resultados para las capas más próximas a la pared, en la transición al campo medio, pierda cierta precisión y efectividad al haber definido la malla asumiendo una capa límite más delgada. La proximidad de las tres paredes es un factor a tener en cuenta.

Estudiando estas líneas de corriente, se puede decidir aumentar el número de celdas en esas zonas de distorsión para intentar obtener una solución más precisa y estable. Como los posteriores estudios que aquí se recogen, demostraron una independencia de la solución con la malla a partir de, precisamente, la primera malla empleada, se decidió mostrar los resultados con esta misma.

También se puede estudiar el flujo de calor a través del número de Nusselt. Se verifica que la distribución de este número a lo largo de las paredes isotérmicas es de igual valor, pero sentido antisimétrico. Esto quiere decir que el flujo de calor dentro de la cavidad se mantiene constante, es decir, el flujo normal de calor que procede de la pared caliente es el mismo que llega a la pared fría.

La definición que hace Fluent del número de Nusselt es:

$$Nu = \frac{q}{T_{pared} - T_{ref}} \cdot \frac{L_{ref}}{k} \quad (4.2)$$

Para los valores del problema se puede sustituir como,

$$Nu_{fluent} = \frac{q}{T_H - \frac{T_H - T_C}{2}} \cdot \frac{W}{k} = \frac{q}{\frac{T_H - T_C}{2}} \cdot \frac{W}{k} \quad (4.3)$$

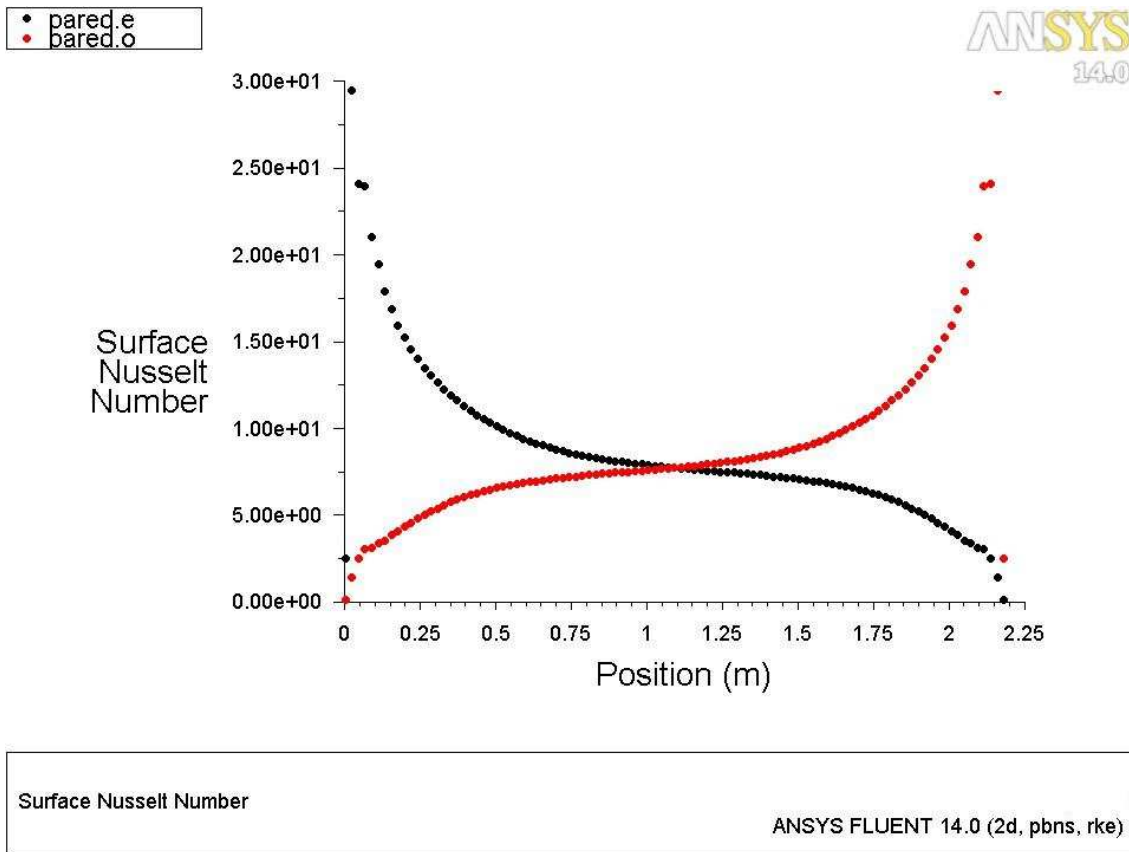


Figura 58. Distribución del número de Nusselt a lo largo de las paredes isotérmicas para modelo realizable $k-\epsilon$, y $Ra = 0.86 \times 10^6$. Pared.e coincide con la pared caliente y Pared.o con la pared fría.

Además, se puede comparar que la tendencia de la distribución sigue los mismos pasos que la obtenida por **Hsieh y Lien (2004) [30]** para la simulación computacional del experimento de Betts y Bokhari.

La definición que hacen Hsieh y Lien (2004) [30] de este número es:

$$Nu_{Hsieh} = \frac{W}{T_H - T_C} \cdot \frac{q}{k} \quad (4.4)$$

Con lo que se observa que los valores del Nusselt según las simulaciones son el doble de los obtenidos por Hsieh y Lien.

$$Nu_{fluent} = 2 \cdot \frac{q}{T_H - T_C} \cdot \frac{W}{k} = 2 \cdot Nu_{Hsieh} \quad (4.5)$$

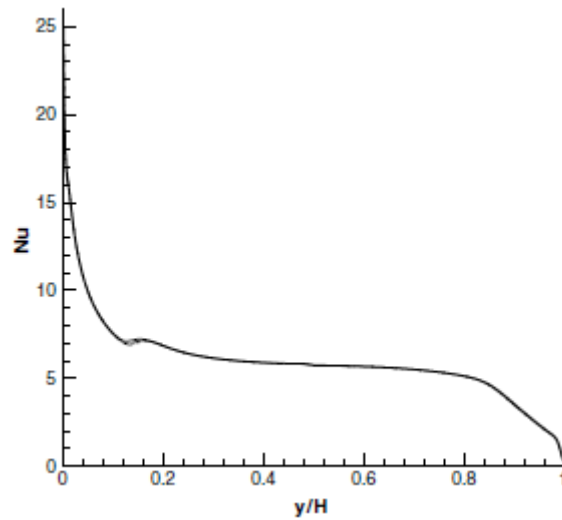


Figura 59. Distribución del número de Nusselt local a lo largo de la pared caliente según las simulaciones de Hsieh y Lien (2004) [30].

Se puede observar como la tendencia que siguen ambas distribuciones son análogas, ubicándose en los mismos rangos numéricos. No obstante, puede apreciarse de nuevo que, si se hubiesen obtenido más valores para las regiones entre campo medio y paredes, las líneas de distribución serían más similares. Aun así, se pueden dar estos resultados por buenos y análogos.

A partir de aquí, el resto de simulaciones en el que se emplee el modelo k-ε, será mediante la opción **realizable k-ε model**, tanto para analizar la dependencia de la malla como para estudiar flujos con mayor número de Rayleigh.

❖ Resultados para los modelos $k-w$

Dentro de la configuración de estos modelos, se escogen para ambos las opciones *Viscous heating* y *Low-Re Corrections*, pues los efectos disipativos de la viscosidad y el relativamente bajo número de Reynolds del flujo se han de tener en cuenta.

La convergencia con los dos modelos fue fácil de alcanzar, siendo necesarias no más de 600 iteraciones para tener un flujo estable.

Se comparan las distribuciones de temperatura y de velocidad vertical a lo ancho de la cavidad con los valores experimentales de Betts y Bokhari para la elección del modelo más adecuado. Se emplean para ello las líneas de referencia que se habían creado a lo ancho de la cavidad en varias alturas; de este modo, se pueden comparar cuantitativamente los perfiles en varios puntos del campo fluido.

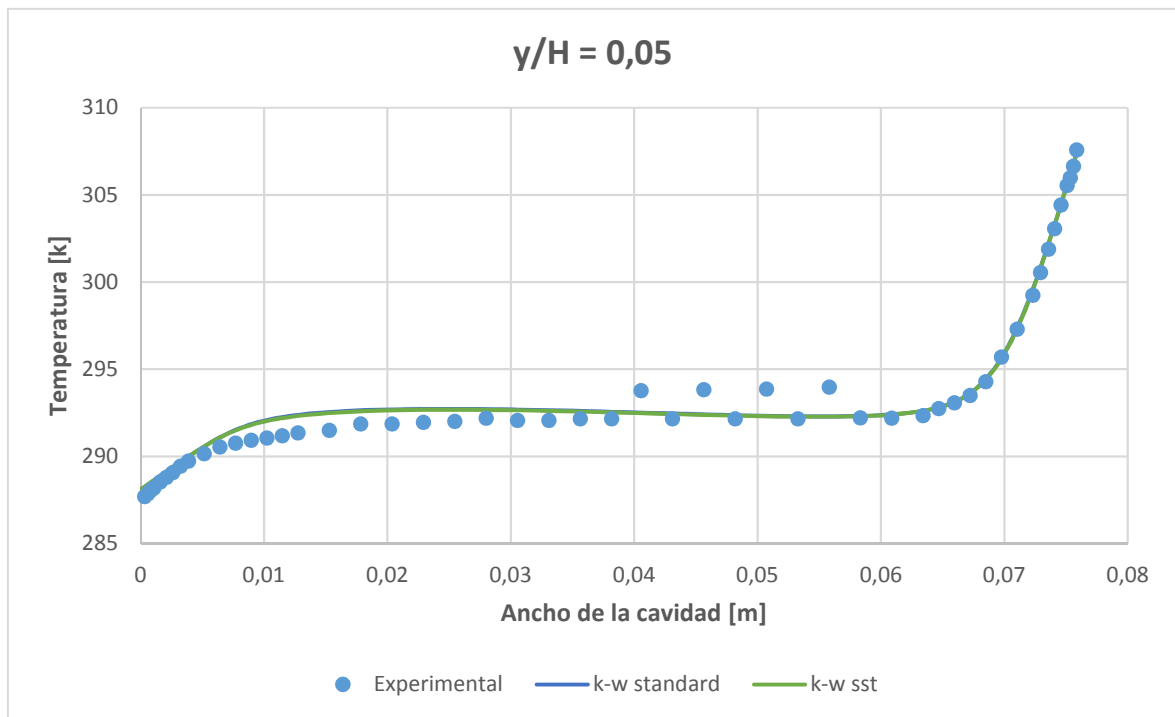


Figura 60. Perfil de temperaturas a lo largo de la recta $y/H = 0.05$ para una malla de 50×100 celdas y modelos $k-w$.

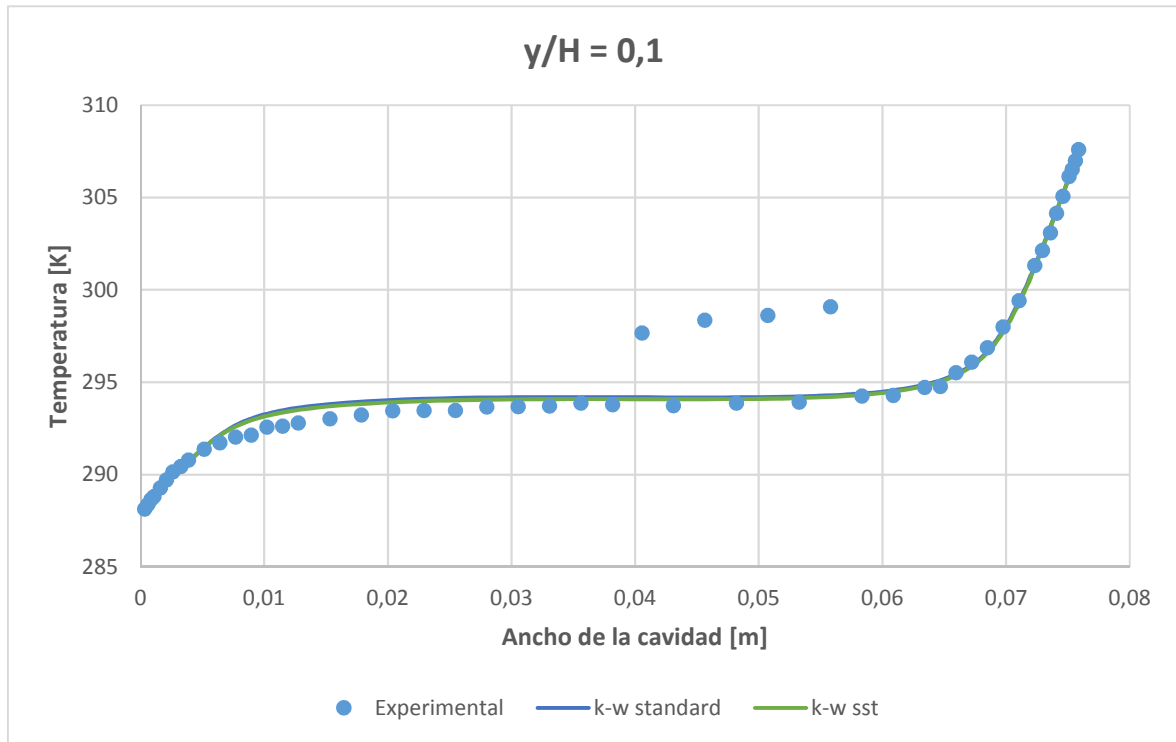


Figura 61. Perfil de temperaturas a lo largo de la recta $y/H = 0.1$ para una malla de 50×100 celdas y modelos k-w.

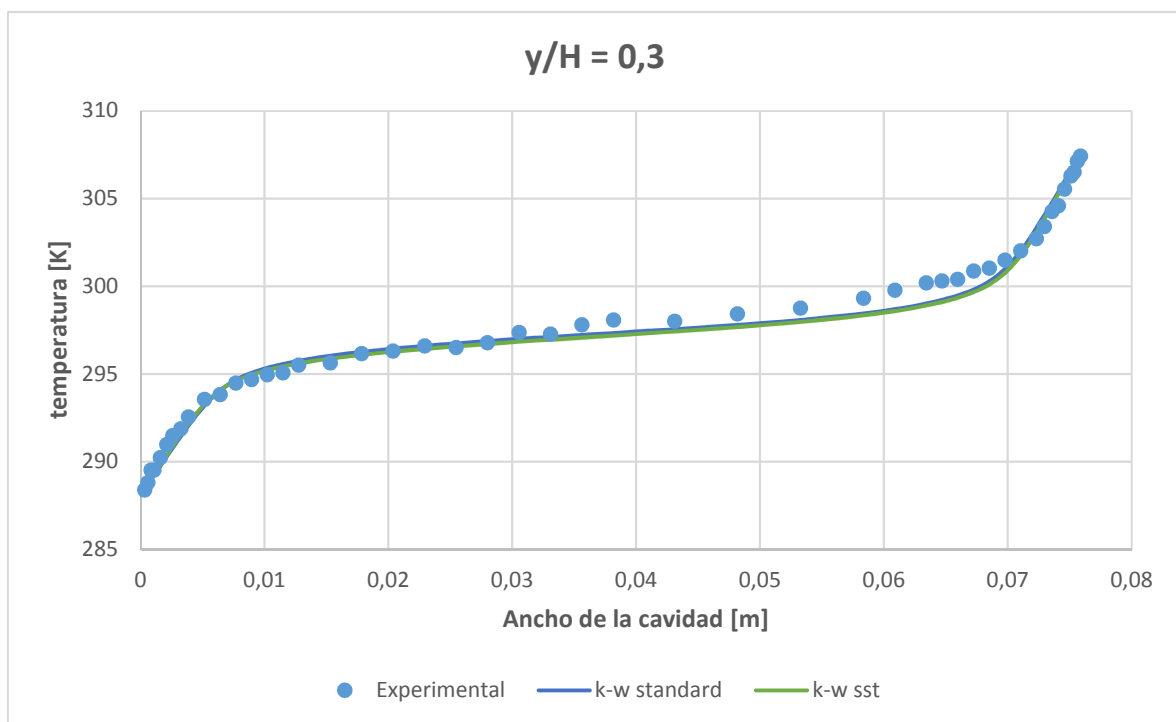


Figura 62. Perfil de temperaturas a lo largo de la recta $y/H = 0.3$ para una malla de 50×100 celdas y modelos k-w.

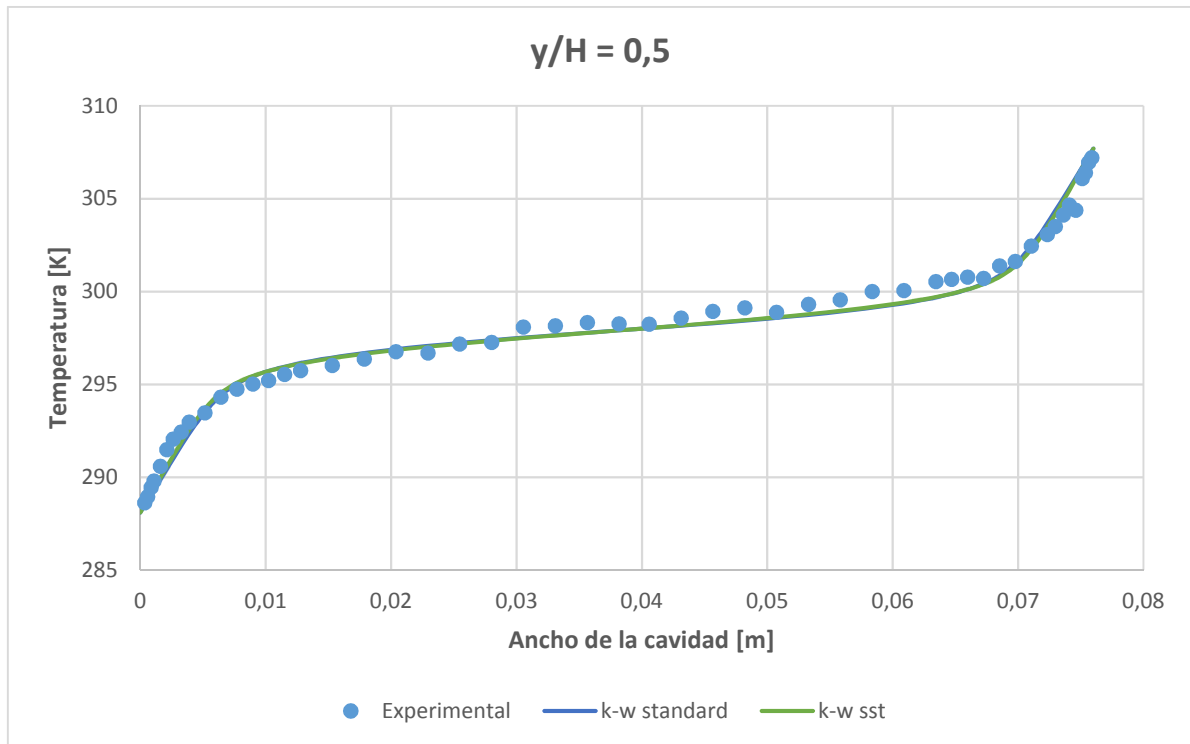


Figura 63. Perfil de temperaturas a lo largo de la recta $y/H = 0.5$ para una malla de 50×100 celdas y modelos k-w.

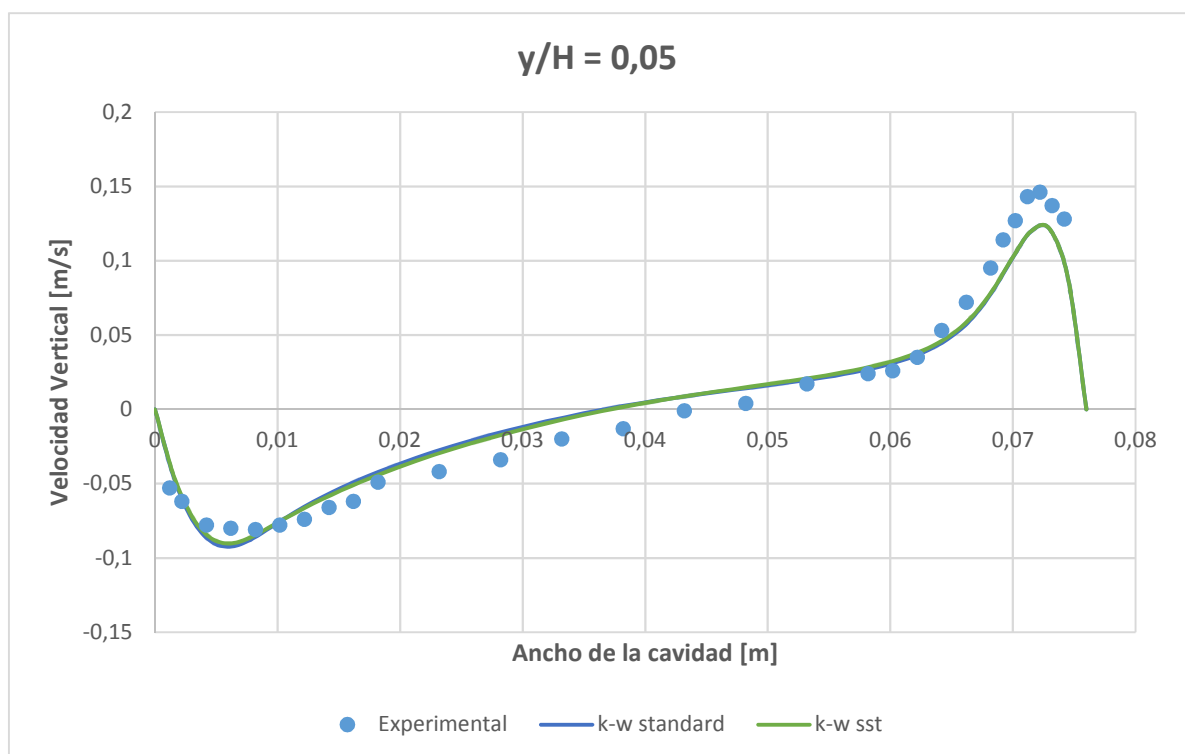


Figura 64. Perfil de velocidad vertical a lo largo de la recta $y/H = 0.05$ para una malla de 50×100 celdas y modelos k-w.

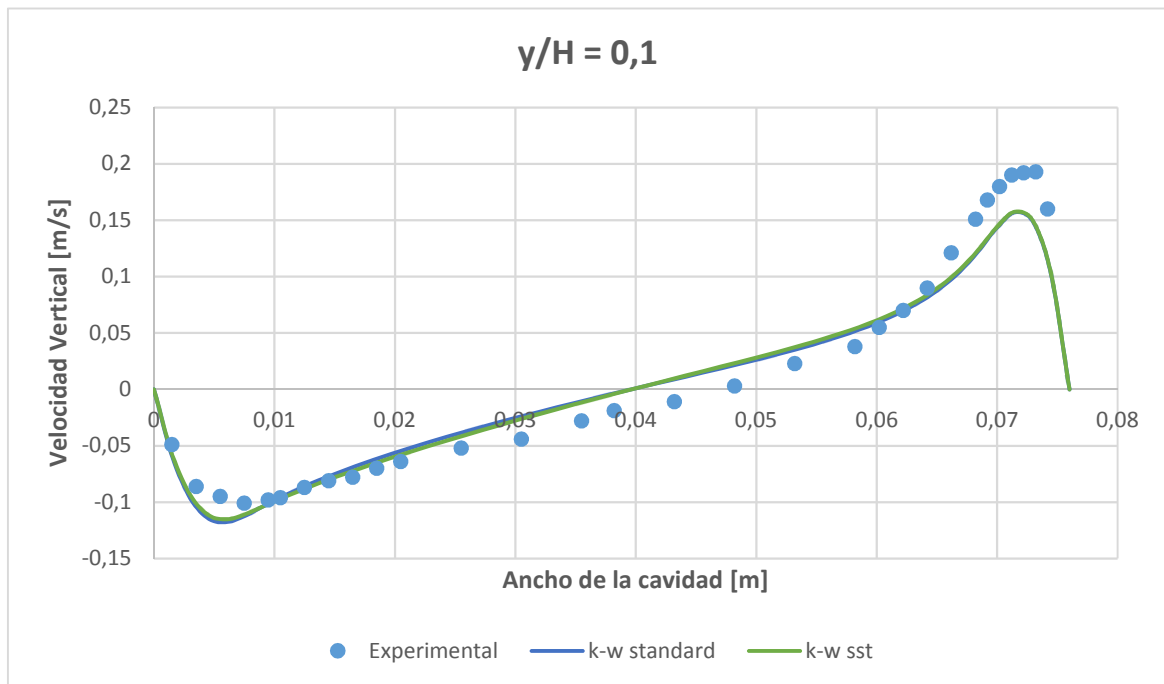


Figura 65. Distribución de velocidad vertical a lo largo de la recta $y/H = 0.1$ para una malla de 50×100 celdas y modelos k-w.

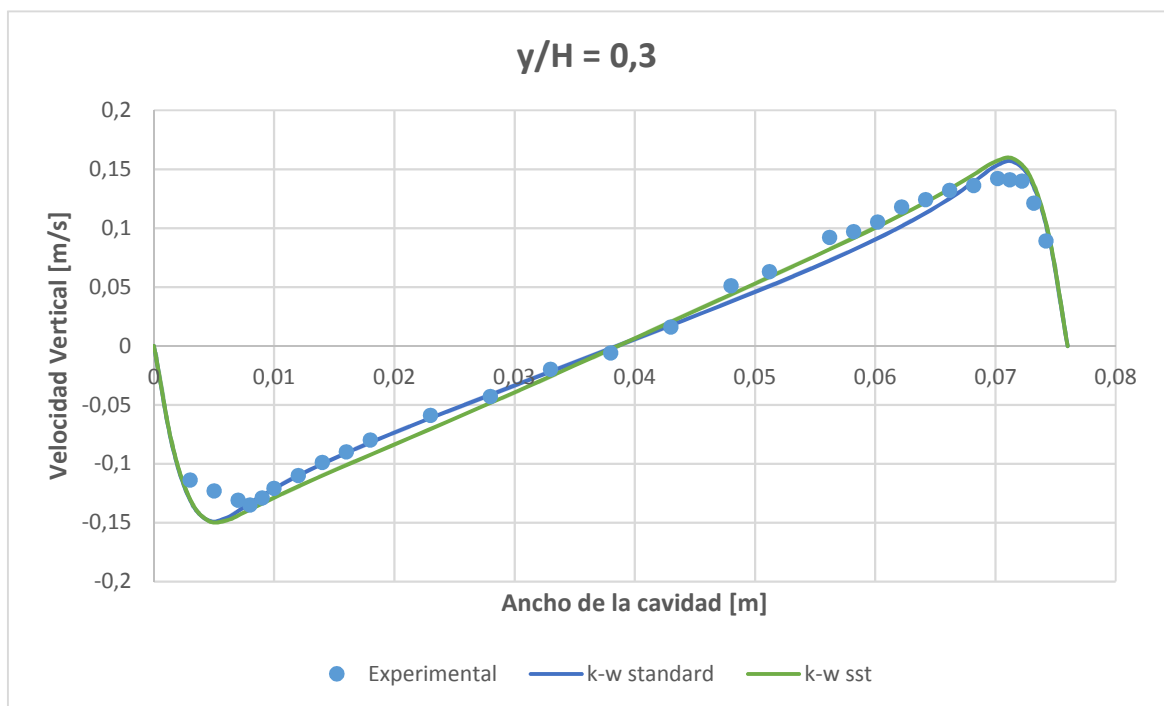


Figura 66. Distribución de velocidad vertical a lo largo de la recta $y/H = 0.3$ para una malla de 50×100 celdas y modelos k-w.

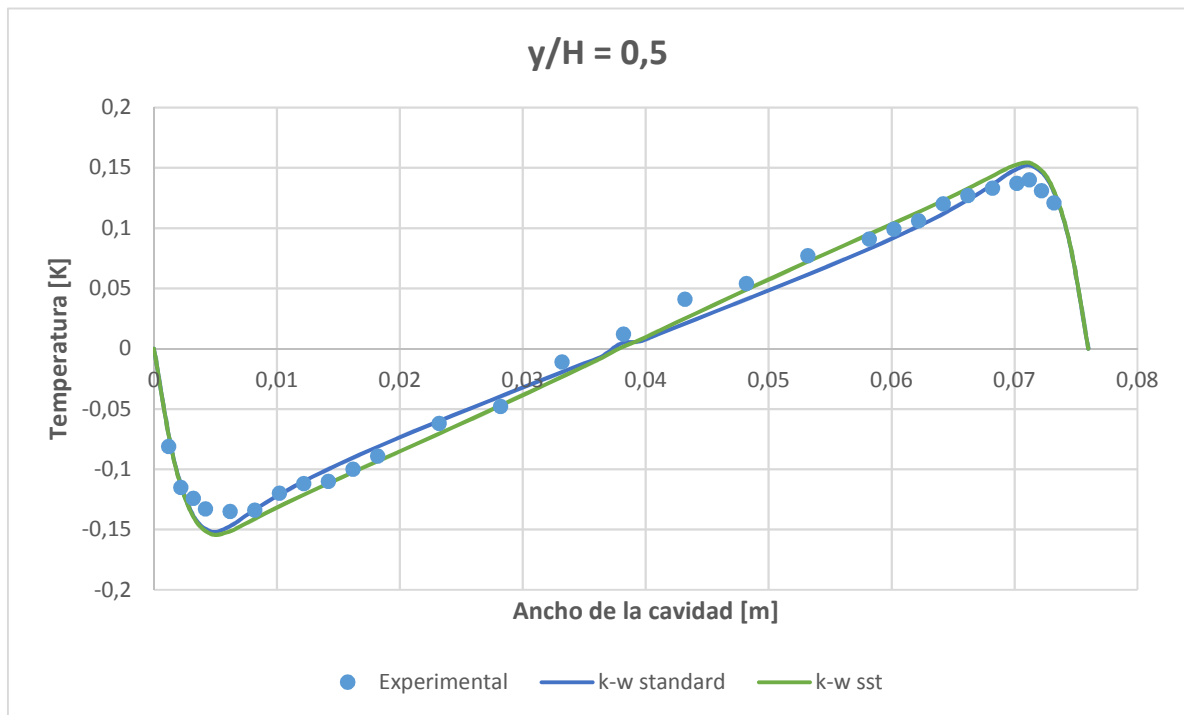


Figura 67. Distribución de velocidad vertical a lo largo de la recta $y/H = 0.5$ para una malla de 50×100 celdas y modelos k-w.

Los resultados demuestran que los modelos k-w otorgan una resolución del campo de temperaturas y de velocidades bastante acertada. Se observa que pierde precisión en ciertas zonas cerca de las paredes caliente y fría, aunque se puede considerar una buena aproximación en general sin necesidad de haber redefinido las regiones cercanas a la pared.

Se observa de nuevo como es más precisa la resolución de los perfiles de temperatura que de velocidad.

Dentro de las dos opciones del modelo k-w, ambas otorgan resultados muy similares excepto para la velocidad en la región media de la cavidad. Como el modelo **standard k-w** es el que más se acerca a los valores experimentales cerca de las paredes isotérmicas, éste será el modelo escogido para simular el resto de casos.

Los contornos de temperatura y líneas de corriente que presenta este modelo se pueden ver a continuación.

Se puede apreciar que este modelo otorga mejores resultados para la misma malla, presentando líneas de corriente distorsionadas en la zona entre campo medio y paredes horizontales.

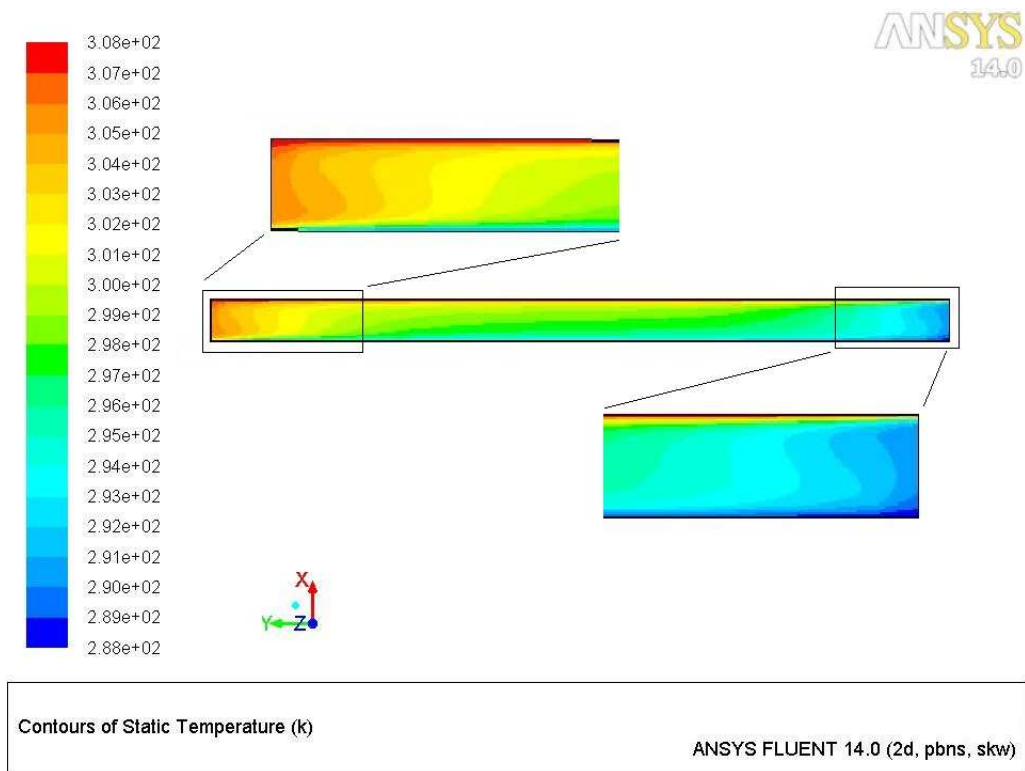


Figura 68. Distribución de temperaturas con el modelo standard $k-w$ y una malla de 50×100 celdas. $Ra = 0.86 \times 10^6$.

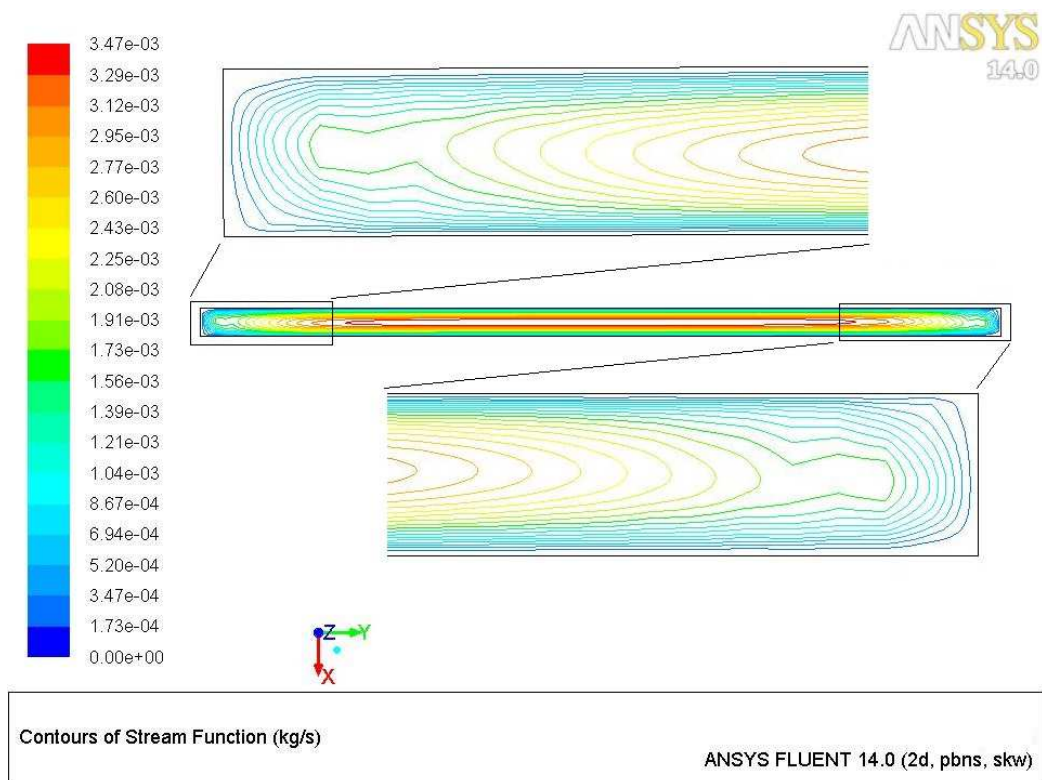


Figura 69. Líneas de corriente con el modelo standard $k-w$ y una malla de 50×100 celdas. $Ra = 0.86 \times 10^6$.

Por último, se verifica que el flujo de calor en la cavidad es constante mediante la distribución del número de Nusselt a lo largo de las paredes isotérmicas.

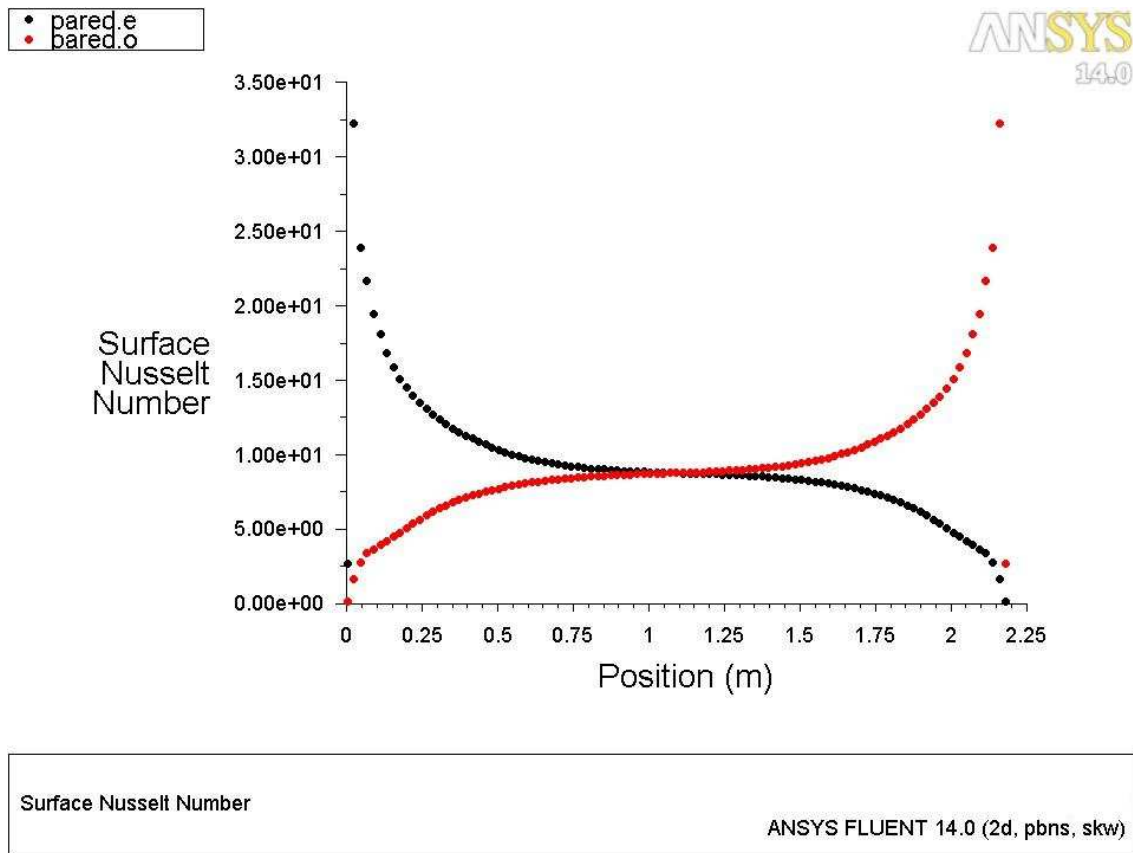


Figura 70. Distribución del número de Nusselt a lo largo de las paredes isotérmicas para modelo *standard k-w*, y $Ra = 0.86 \times 10^6$. *Pared.e* coincide con la pared caliente y *Pared.o* con la pared fría.

Se comprueba que la tendencia de la distribución coincide un pequeño porcentaje mayor con los resultados obtenidos por Hsieh y Lien (2004) [30] en la *Figura 58*. Esto pone de manifiesto que, de nuevo, este modelo es el que mejores resultados da para esta malla.

Por lo resultados obtenido, será este modelo el seleccionado como primera opción a la hora de obtener una solución bastante precisa de temperatura y velocidad en todas las regiones del flujo.

❖ Resultados para el modelo Transitional SST

Este modelo se configura seleccionando únicamente la opción *Viscous heating*. El resto de parámetros se dejan como en los otros modelos.

La convergencia fue fácil de alcanzar, siendo necesarias no más de 500 iteraciones para tener un flujo estable.

Se comparan las distribuciones de temperatura y de velocidad vertical a lo ancho de la cavidad con los valores experimentales de Betts y Bokhari (2000) [6].

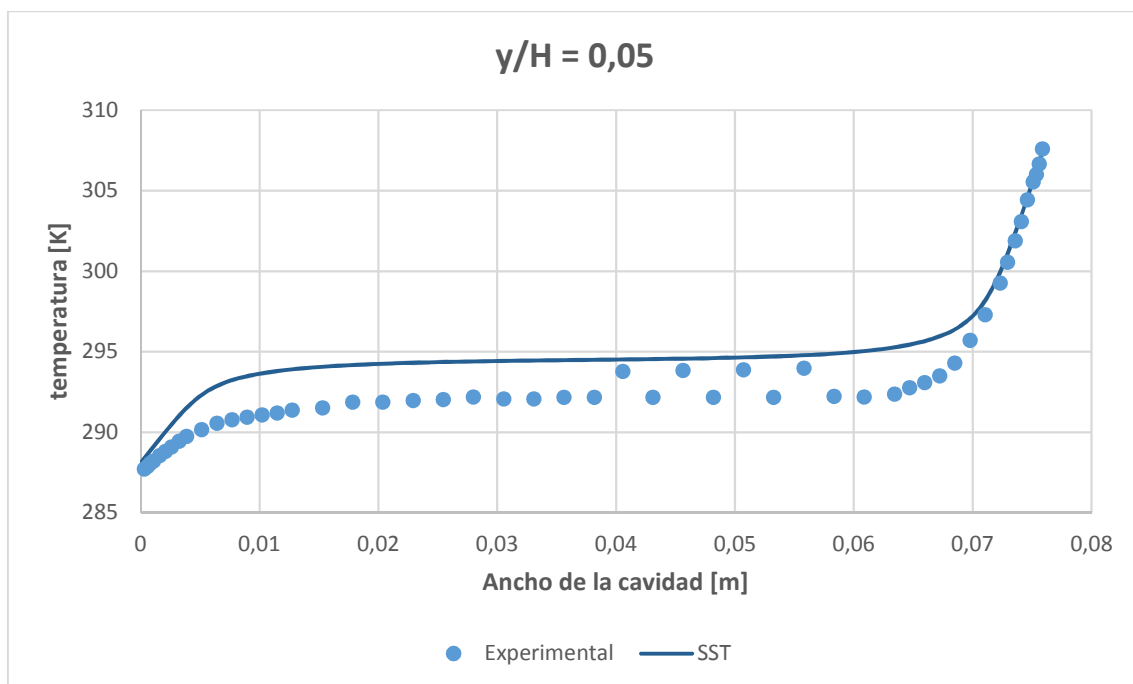


Figura 71. Perfil de temperaturas a lo largo de la recta $y/H = 0.05$ para una malla de 50×100 celdas y modelo Transitional SST.

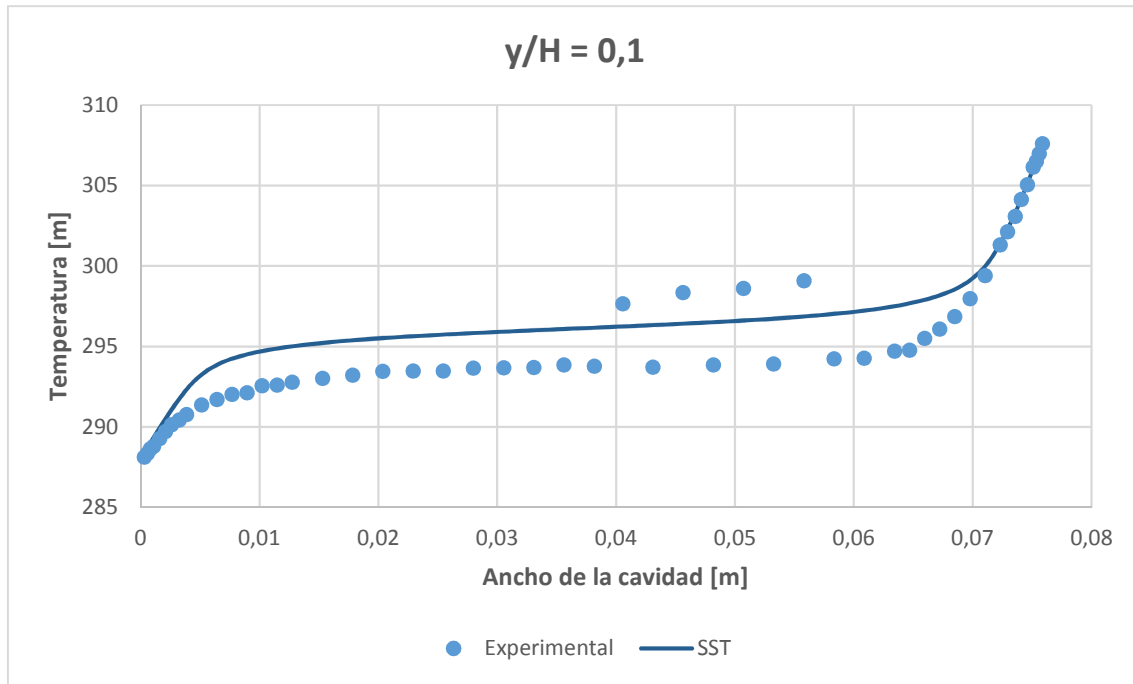


Figura 72. Perfil de temperaturas a lo largo de la recta $y/H = 0.1$ para una malla de 50×100 celdas y modelo Transitional SST.

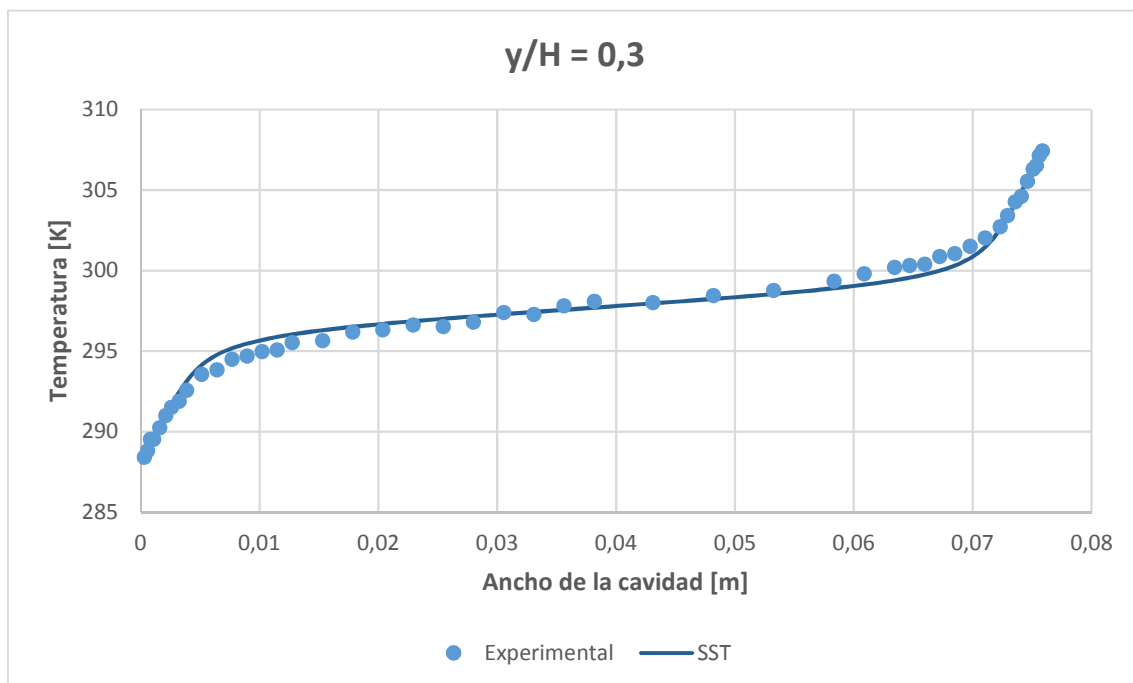


Figura 73. Perfil de temperaturas a lo largo de la recta $y/H = 0.3$ para una malla de 50×100 celdas y modelo Transitional SST.

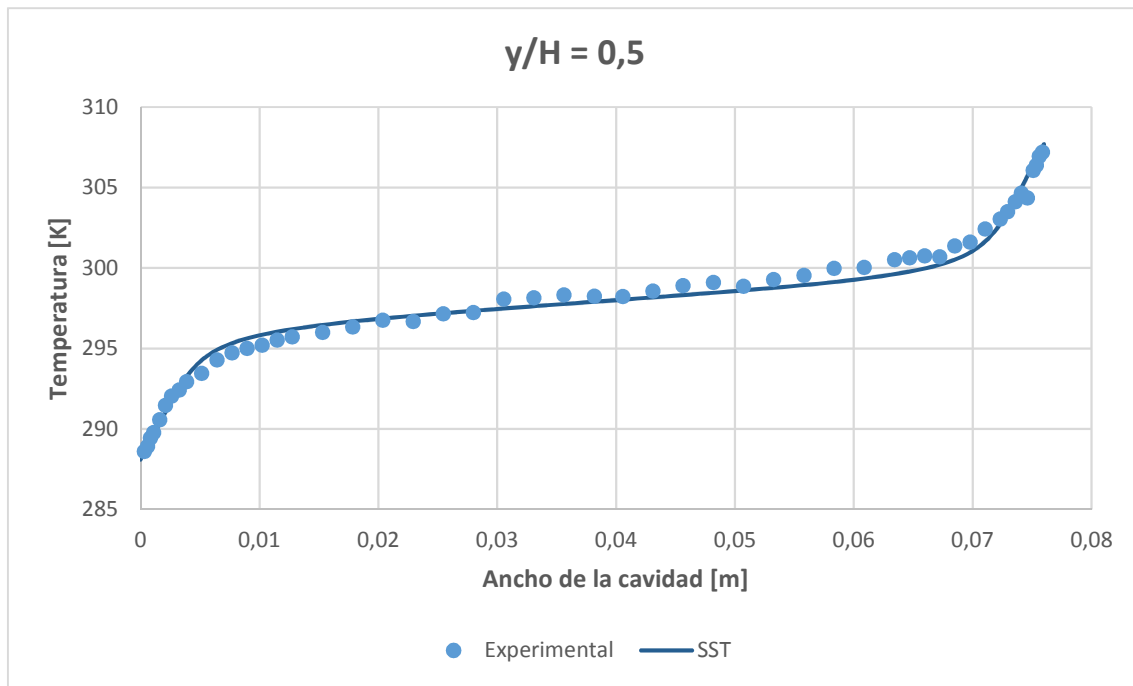


Figura 74. Perfil de temperaturas a lo largo de la recta $y/H = 0.5$ para una malla de 50×100 celdas y modelo Transitional SST.

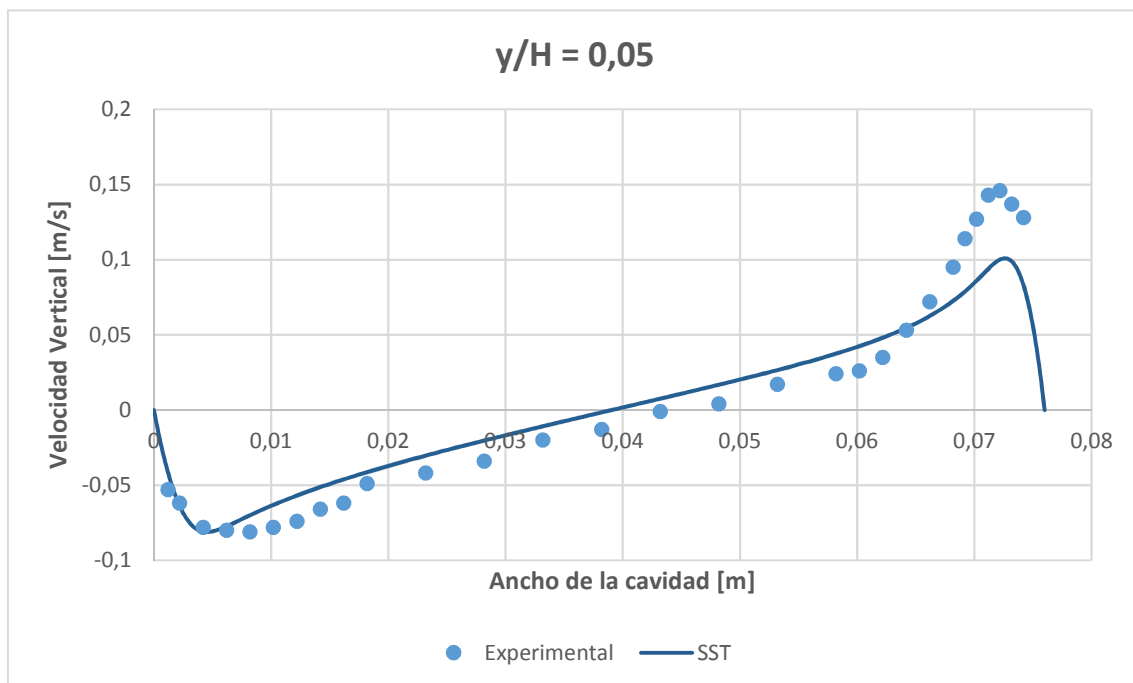


Figura 75. Distribución de velocidad vertical a lo largo de la recta $y/H = 0.05$ para una malla de 50×100 celdas y modelo Transitional SST.

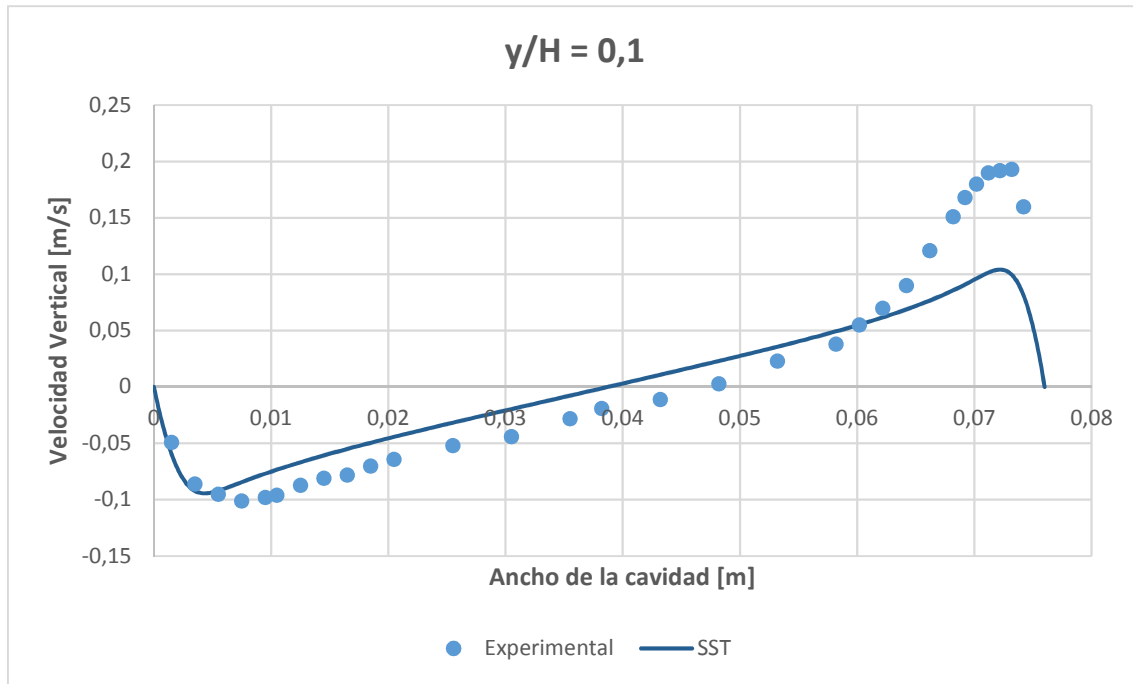


Figura 76. Distribución de velocidad vertical a lo largo de la recta $y/H = 0.1$ para una malla de 50×100 celdas y modelo Transitional SST.

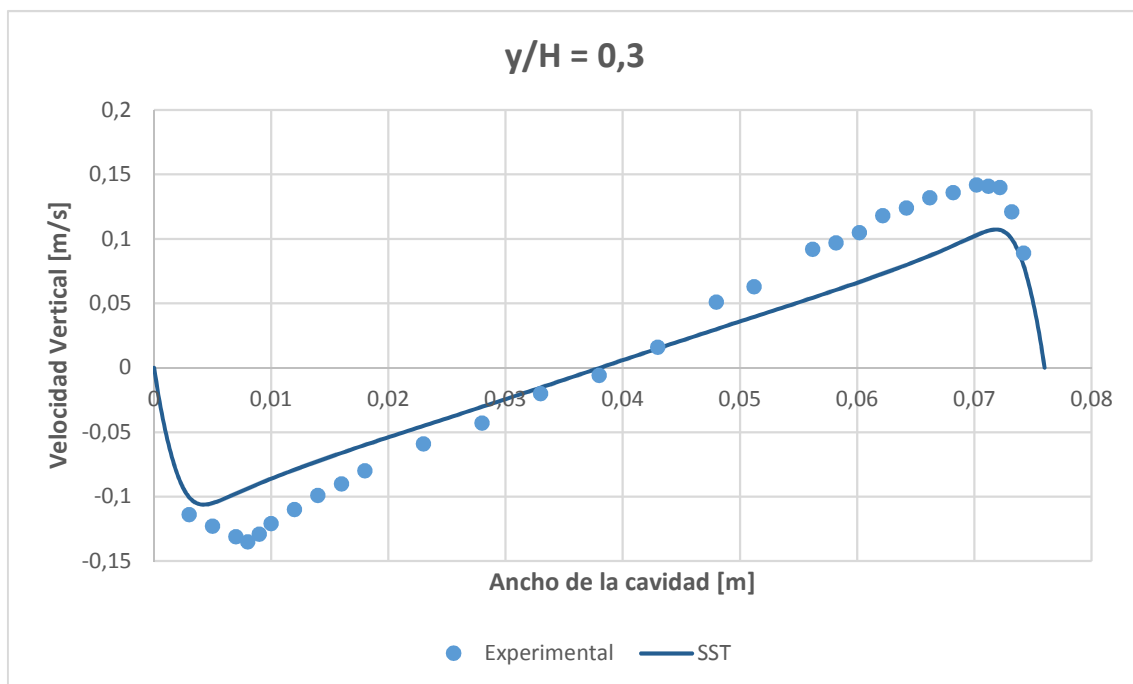


Figura 77. Distribución de velocidad vertical a lo largo de la recta $y/H = 0.3$ para una malla de 50×100 celdas y modelo Transitional SST.

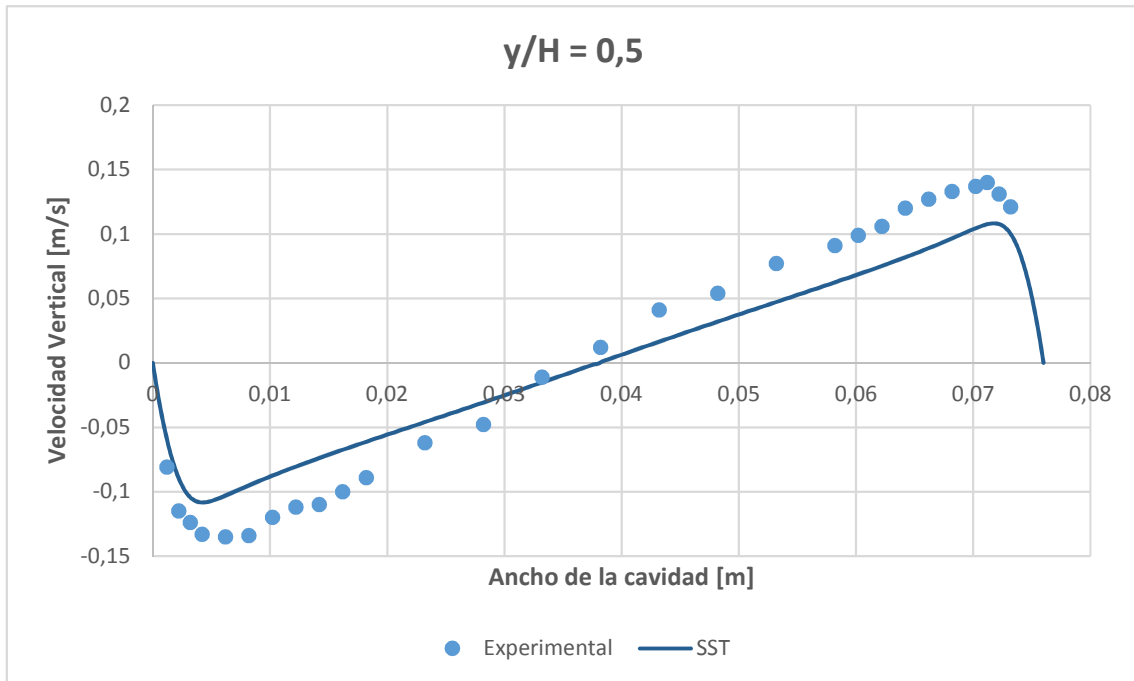


Figura 78. Distribución de velocidad vertical a lo largo de la recta $y/H = 0.5$ para una malla de 50×100 celdas y modelo Transitional SST.

Se observa que los valores que mejor predice este modelo son los correspondientes al campo de temperaturas para la región media del fluido. La precisión de la solución cerca de las paredes horizontales disminuye considerablemente.

Así mismo, los perfiles de velocidad obtenidos también difieren un pequeño porcentaje respecto a los experimentales.

Esto hace que este modelo se seleccione como “modelo de prueba”, es decir, es conveniente utilizarlo en primera instancia, dada la rapidez de los cálculos y la sencillez de la configuración del modelo, para obtener una primera solución de los patrones que adquieren los perfiles de temperatura y velocidad.

Este modelo también es adecuado si se quiere hacer un estudio del campo medio, así como visualizar los contornos de temperatura y líneas de corriente sin profundizar demasiado en las regiones cercanas a la pared.

A continuación, se representan los contornos de temperatura y líneas corriente para este modelo.

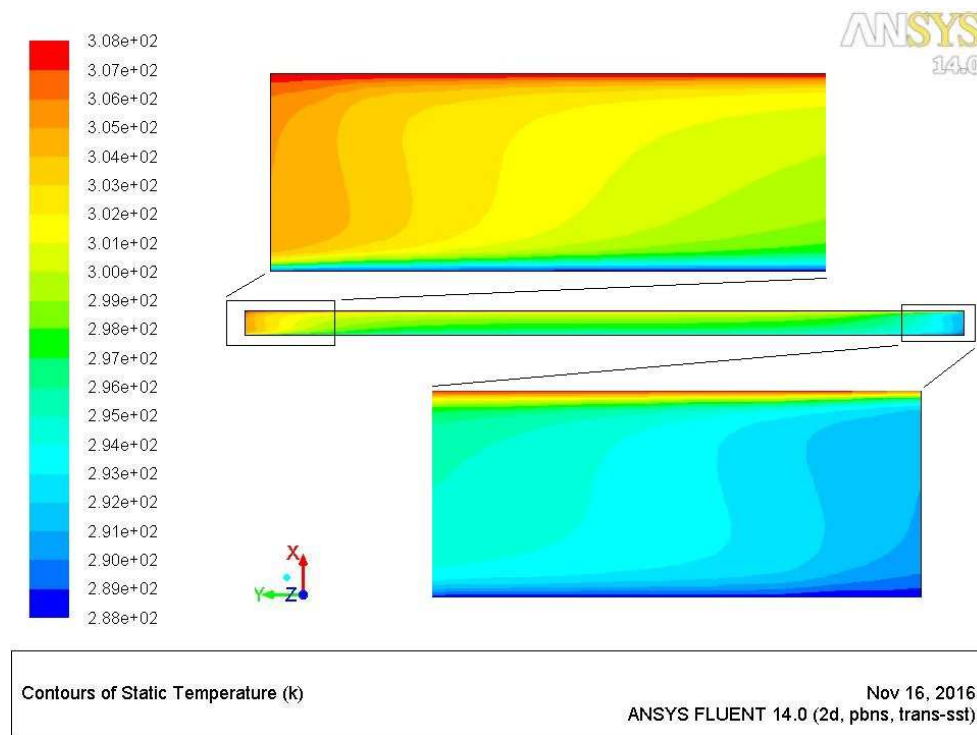


Figura 79. Distribución de temperaturas con el modelo Transitional SST y una malla de 50 x 100 celdas.
 $Ra = 0.86 \times 10^6$.

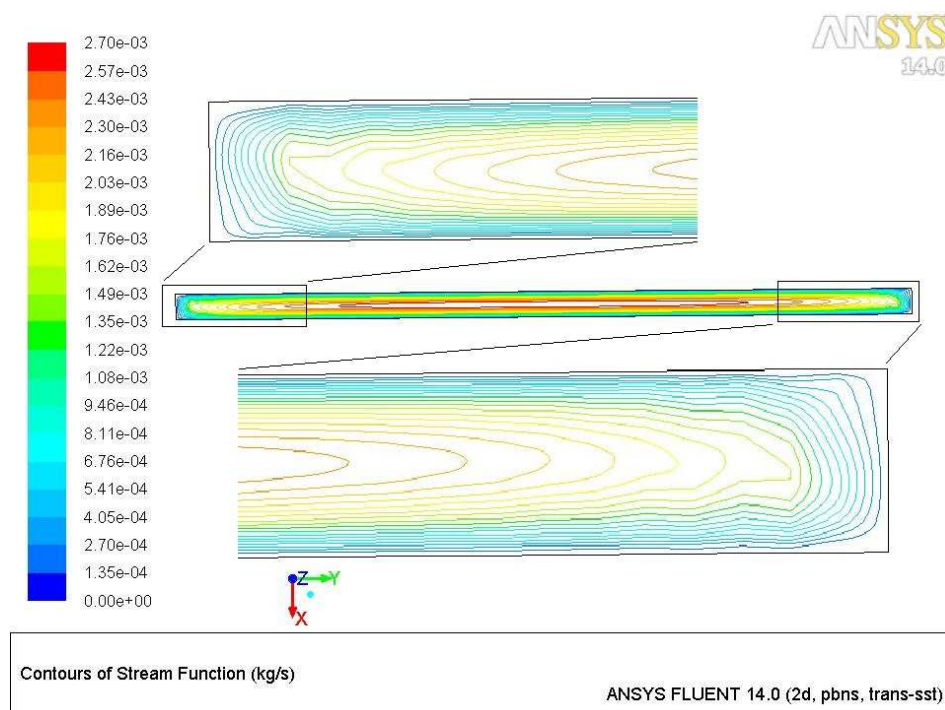


Figura 80. Líneas de corriente para el modelo Transitional SST y una malla de 50 x 100 celdas.
 $Ra = 0.86 \times 10^6$.

Por último, se verifica que el flujo de calor en la cavidad es constante mediante la distribución del número de Nusselt a lo largo de las paredes isotérmicas.

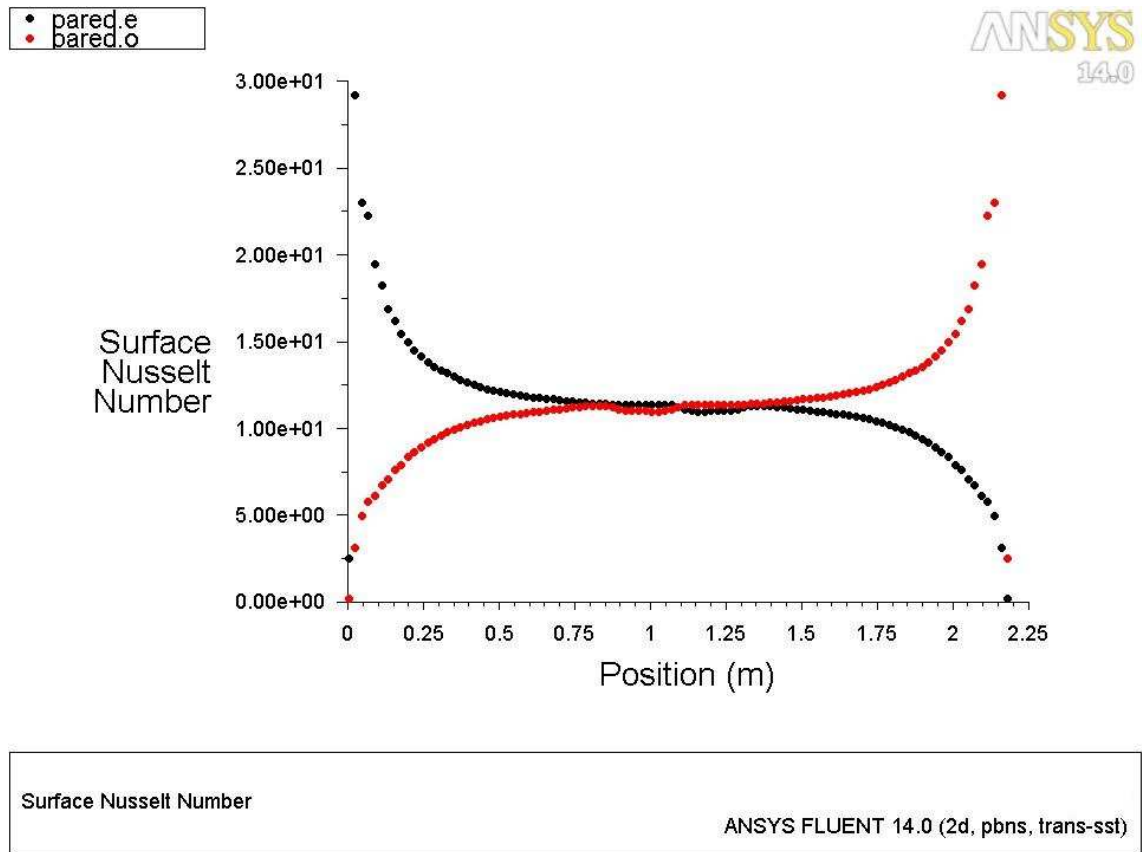


Figura 81. Distribución del número de Nusselt a lo largo de las paredes isotérmicas para modelo Transitional SST y $Ra = 0.86 \times 10^6$. Pared.e coincide con la pared caliente y Pared.o con la pared fría.

❖ Verificación de la dependencia con la malla

Se verifica que el problema depende de un mallado correcto hasta cierto valor. Si no se divide en un apropiado número de celdas, los cálculos resolutivos pueden no llegar a converger y mantenerse constantes fuera de la convergencia. Por el contrario, un número excesivo de celdas puede retrasar los cálculos enormemente y hacer las calculaciones muy pesadas.

Se debe proporcionar un número de celdas suficientemente grande para resolver adecuadamente tanto el campo medio como la zona próxima a las paredes, donde el cálculo se vuelve crítico. Se comprueba que esta malla inicial de 50 x 100 es la ideal, otorgando unos resultados muy precisos en muy poco tiempo.

Posteriormente, se refinó el número de celdas de la malla dos veces. A partir de los resultados para la malla inicial, se volvió a obtener la solución del problema para, primero, una malla de 100 x 200 y, más tarde, para una de 200 x 400.

Estas mallas estructuradas se componen de elementos cuadráticos con distribución uniforme. En este caso, el número de celdas a lo largo de la dirección longitudinal es suficientemente grande para proporcionar soluciones fiables cerca de las paredes, sin necesidad de refinar la malla en estas zonas.

Se estudia la independencia con la malla en la solución de la distribución de la temperatura y los perfiles de velocidad a lo largo del ancho para la recta cerca de la pared inferior y en la región media de la cavidad. Se comprueba que no se producen diferencias significativas en las otras dos rectas definidas.

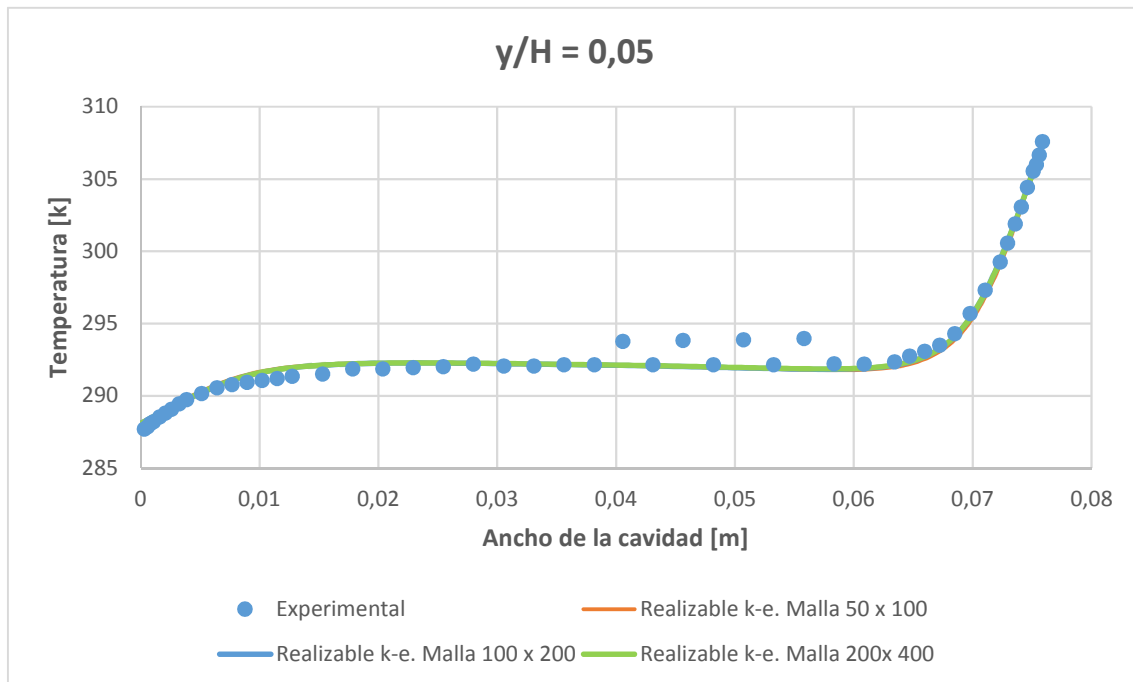


Figura 82. Perfiles de temperatura a lo largo de la recta $y/H = 0.05$ para una malla de 50 x 100 celdas, una de 100 x 200 celdas y otra de 200 x 400 celdas con modelo realizable k-e.

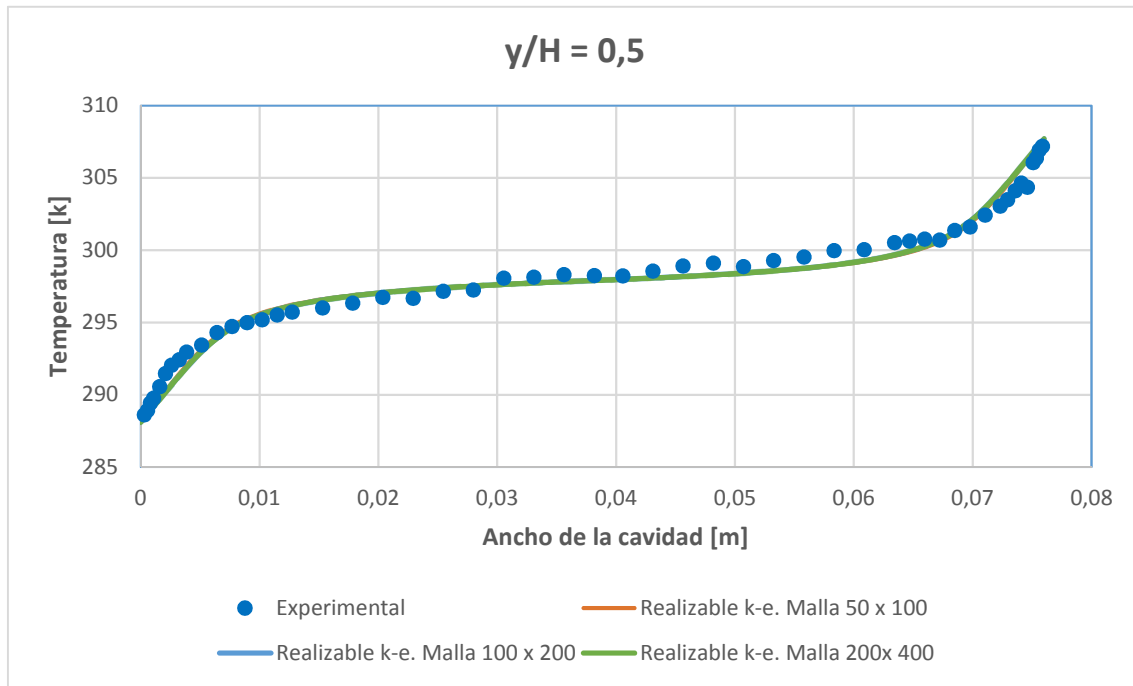


Figura 83. Perfiles de temperatura a lo largo de la recta $y/H = 0.5$ para una malla de 50 x 100 celdas, una de 100 x 200 celdas y otra de 200 x 400 celdas con modelo realizable k-e.

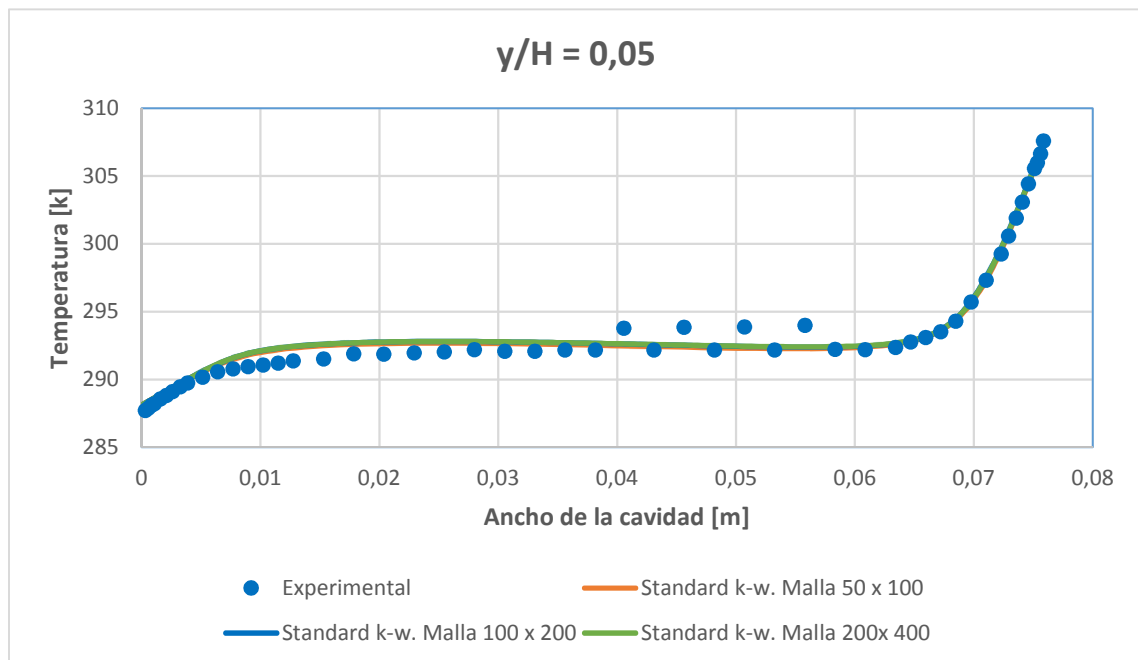


Figura 84. Perfiles de temperatura a lo largo de la recta $y/H = 0.05$ para una malla de 50 x 100 celdas, una de 100 x 200 celdas y otra de 200 x 400 celdas con modelo standard k-w.

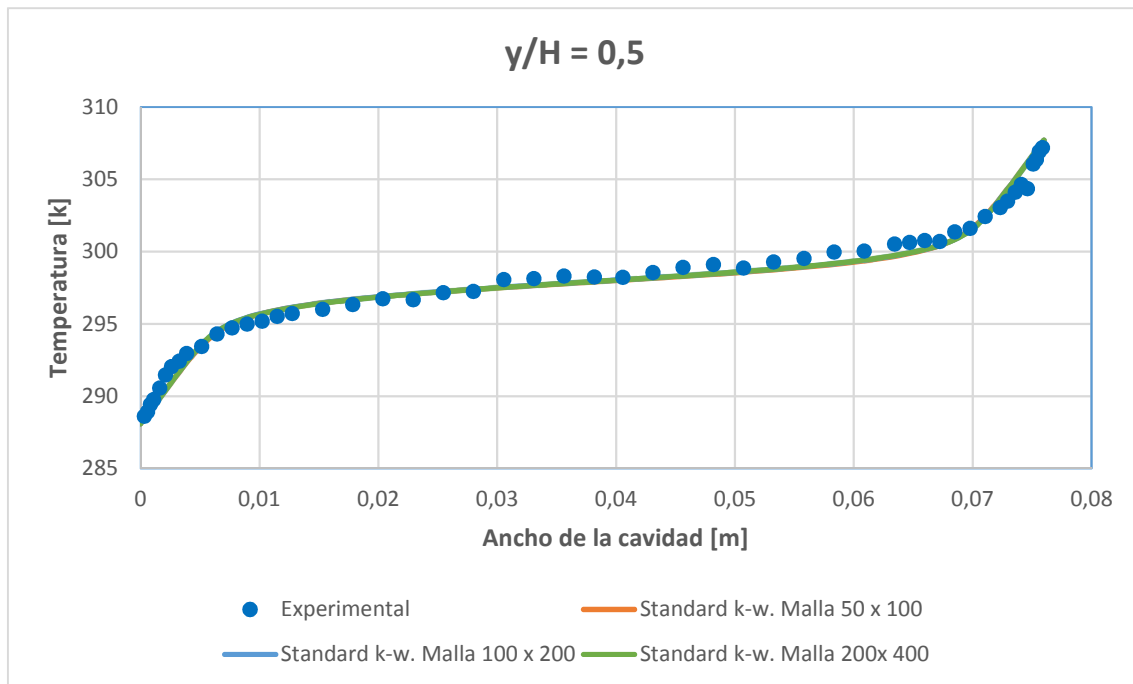


Figura 85. Perfiles de temperatura a lo largo de la recta $y/H = 0.5$ para una malla de 50×100 celdas, una de 100×200 celdas y otra de 200×400 celdas con modelo standard k-w.

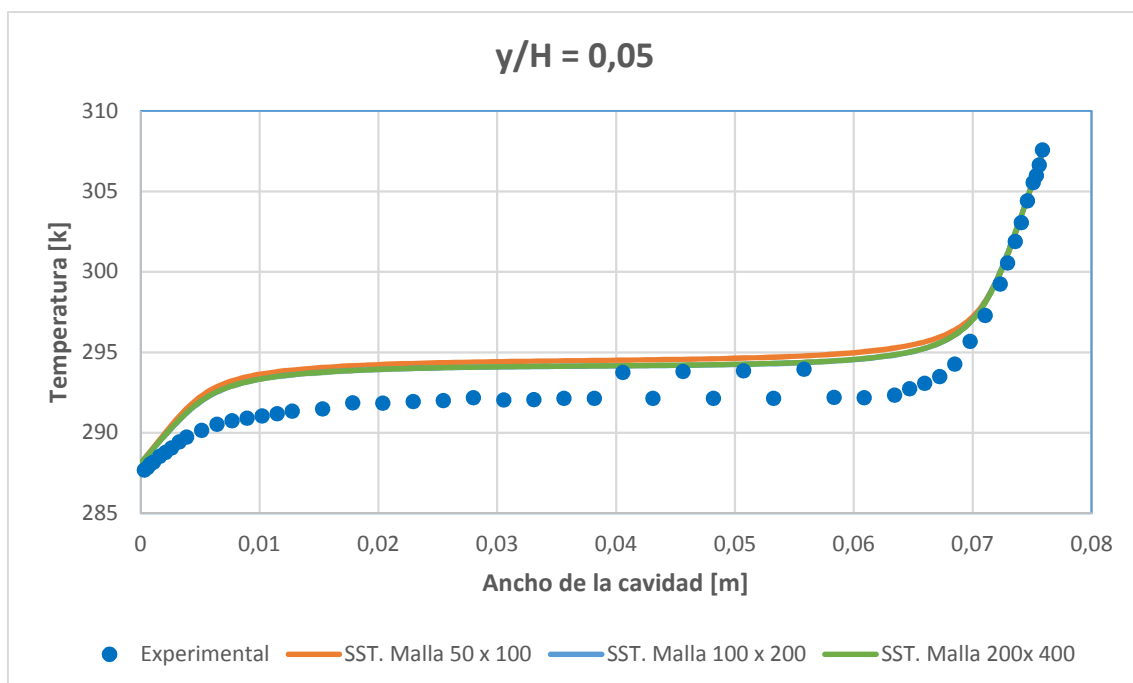


Figura 86. Perfiles de temperatura a lo largo de la recta $y/H = 0.05$ para una malla de 50×100 celdas, una de 100×200 celdas y otra de 200×400 celdas con modelo Transitional SST.

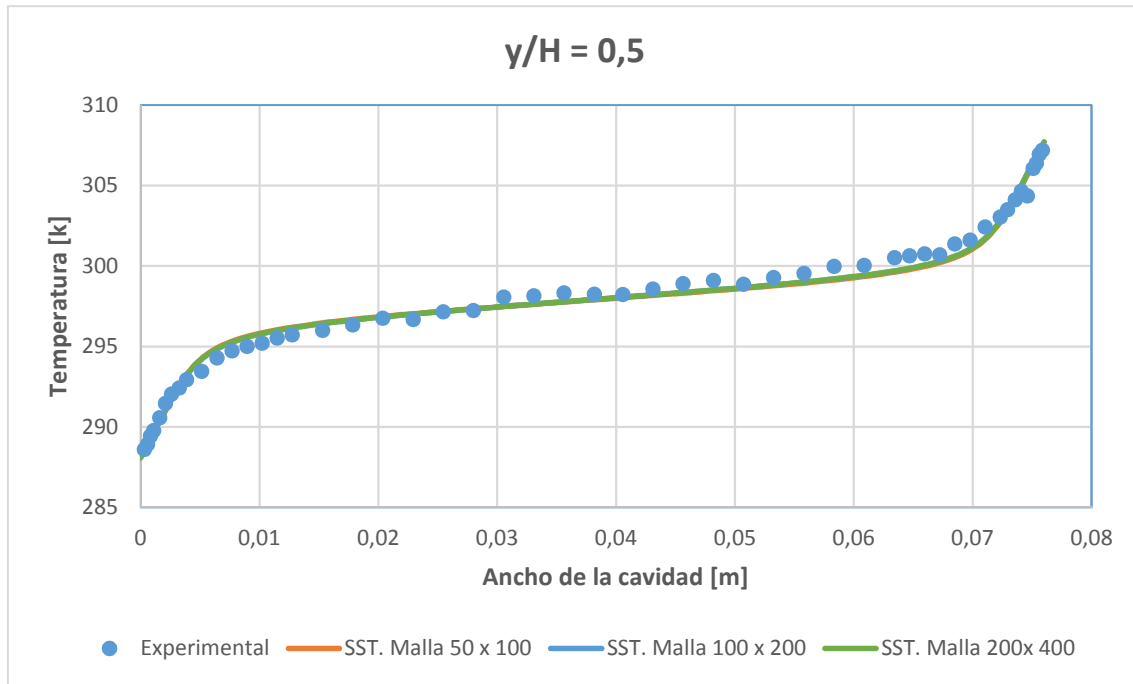


Figura 87. Perfiles de temperatura a lo largo de la recta $y/H = 0.5$ para una malla de 50×100 celdas, una de 100×200 celdas y otra de 200×400 celdas con modelo Transicional SST.

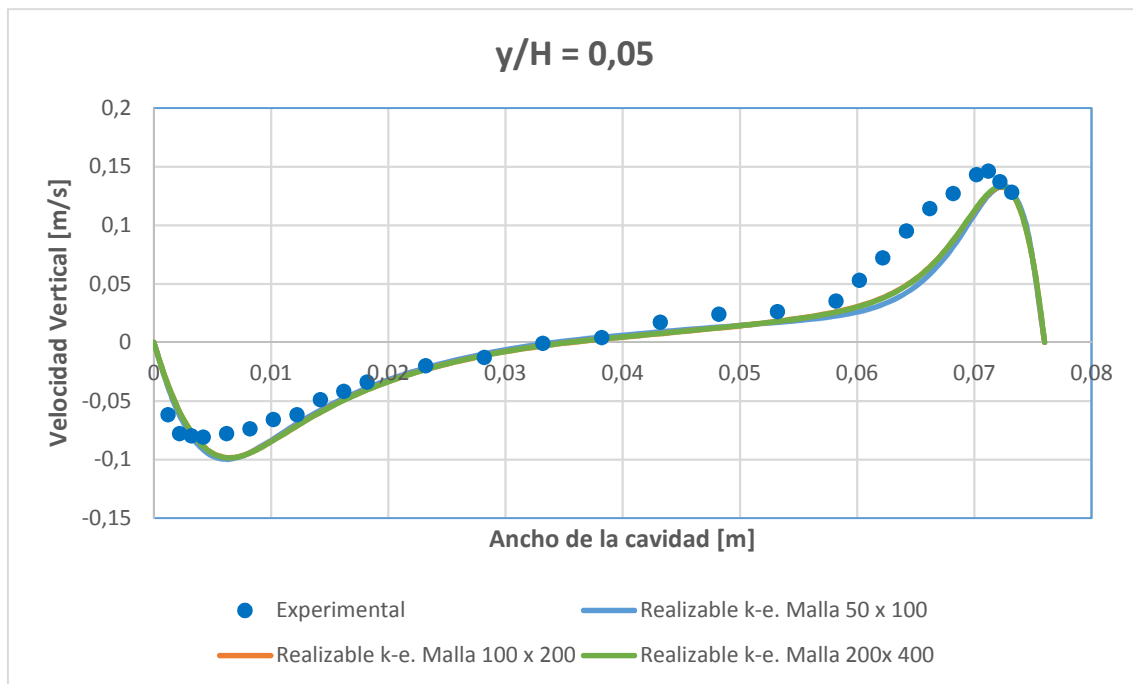


Figura 88. Distribución de velocidad vertical a lo largo de la recta $y/H = 0.05$ para una malla de 50×100 celdas, una de 100×200 celdas y otra de 200×400 celdas con modelo realizable k-e.

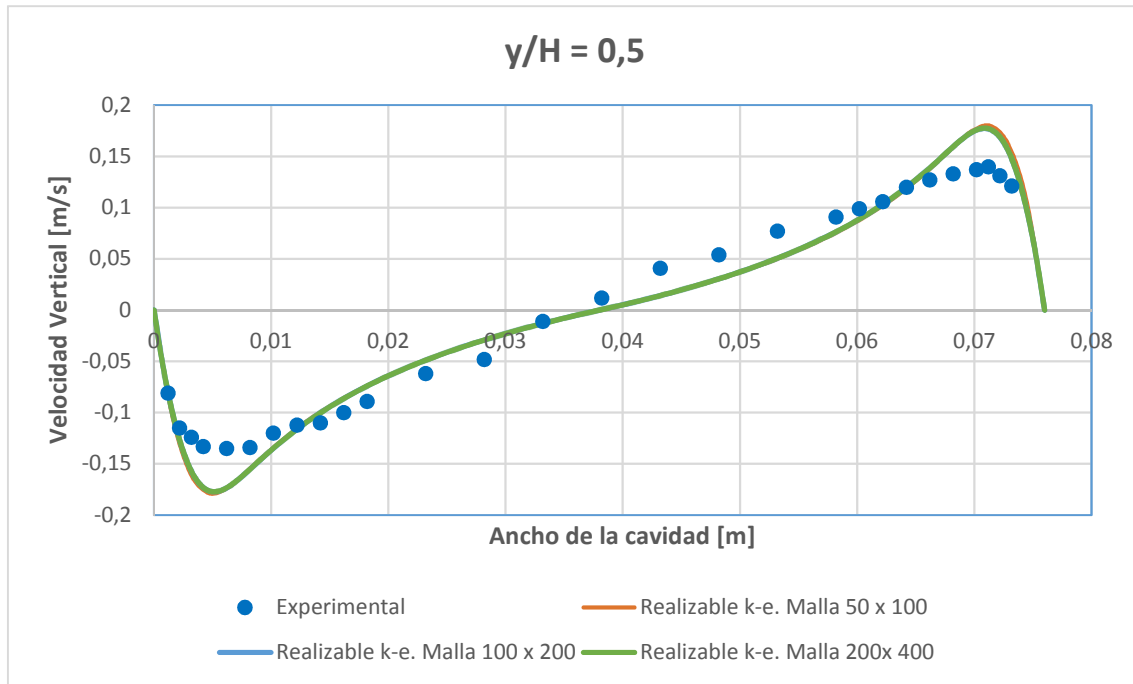


Figura 89. Distribución de velocidad vertical a lo largo de la recta $y/H = 0.5$ para una malla de 50 x 100 celdas, una de 100 x 200 celdas y otra de 200 x 400 celdas con modelo realizable k-e.

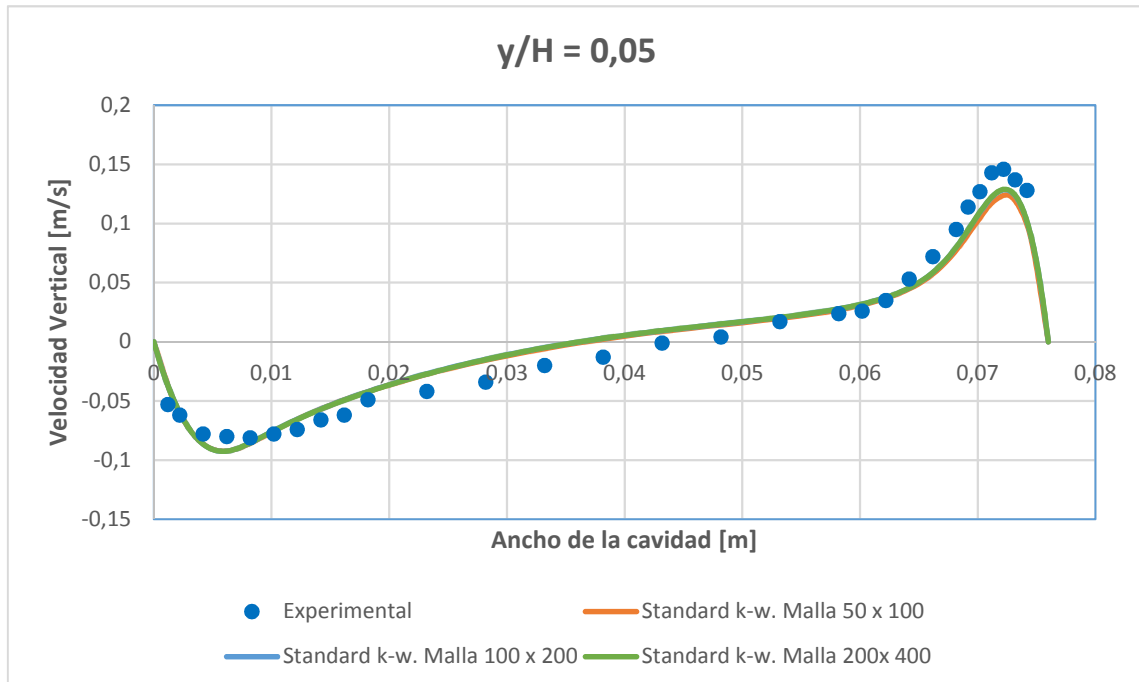


Figura 90. Distribución de velocidad vertical a lo largo de la recta $y/H = 0.05$ para una malla de 50 x 100 celdas, una de 100 x 200 celdas y otra de 200 x 400 celdas con modelo standard k-w.

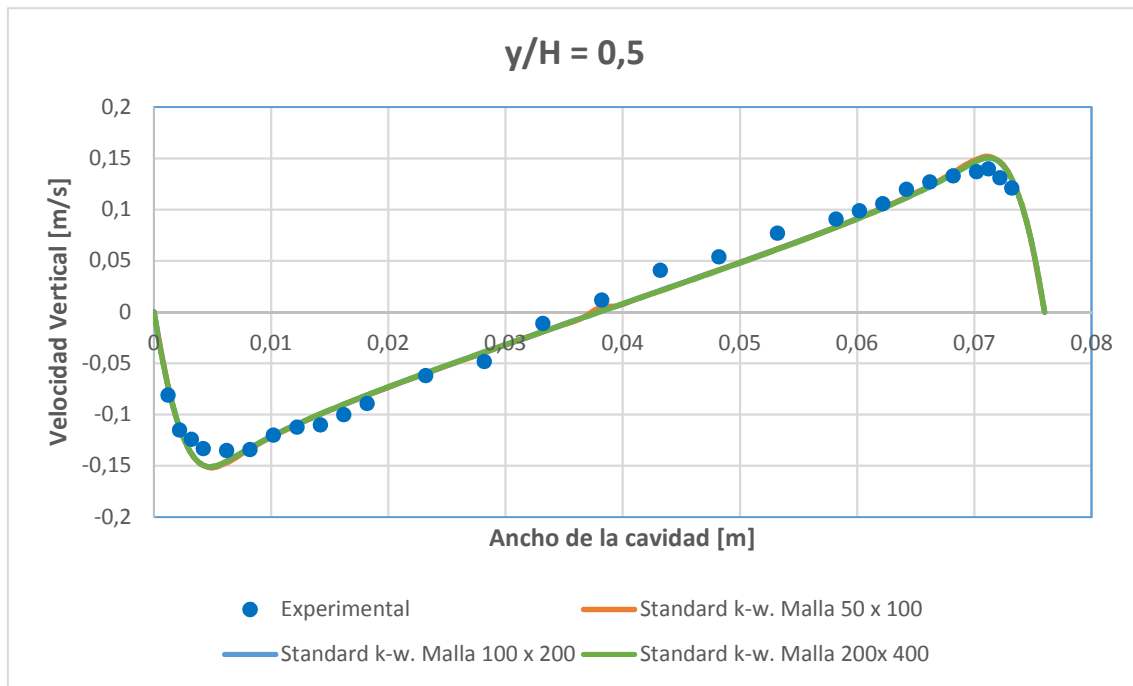


Figura 91. Distribución de velocidad vertical a lo largo de la recta $y/H = 0.5$ para una malla de 50×100 celdas, una de 100×200 celdas y otra de 200×400 celdas con modelo standard k-w.

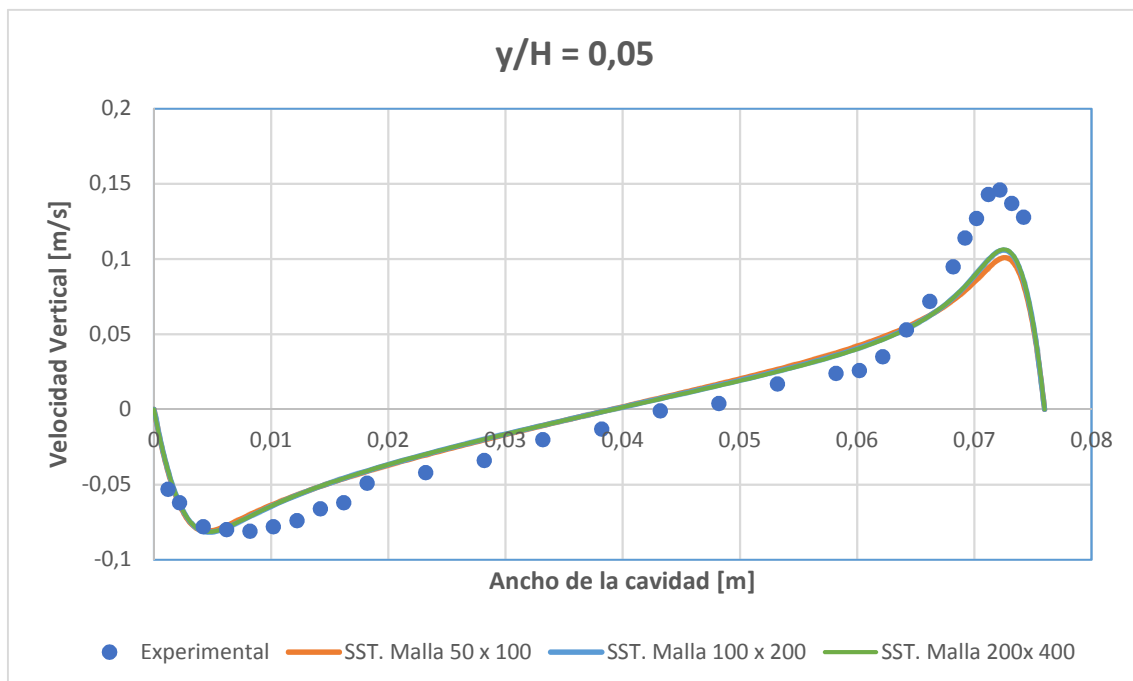


Figura 92. Distribución de velocidad vertical a lo largo de la recta $y/H = 0.05$ para una malla de 50×100 celdas, una de 100×200 celdas y otra de 200×400 celdas con modelo Transitional SST.

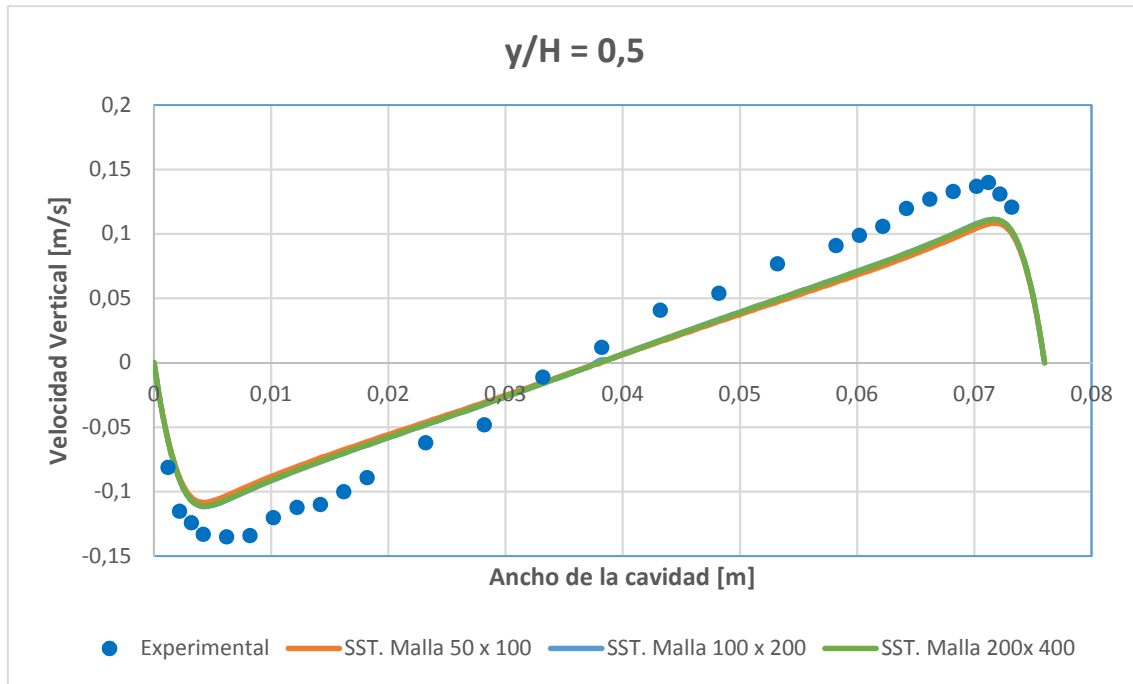


Figura 93. Distribución de velocidad vertical a lo largo de la recta $y/H = 0.5$ para una malla de 50 x 100 celdas, una de 100 x 200 celdas y otra de 200 x 400 celdas con modelo Transicional SST.

En base a los resultados obtenidos, se escoge la malla de tamaño 50 x 100 para continuar con las simulaciones y modelación del resto de casos, pues proporciona datos suficientemente fiables y precisos con gran rapidez.

5.2.2. Cavity rectangular, $Ra = 1.43 \times 10^6$

En este caso, el gradiente de temperaturas aplicado es mayor, con lo que aumenta el número de Rayleigh. Sigue tratándose, pues, de régimen turbulento.

La diferencia de temperaturas aplicada es de $\Delta T = 39.6^\circ\text{C}$, con una temperatura de las paredes isotérmicas $T_c (x = 0) = 288.1 \text{ K}$ y $T_h (x = W) = 327.7 \text{ K}$ respectivamente. Las paredes verticales siguen siendo adiabáticas y todas ellas cumplen la condición de no deslizamiento o *no slip* para la velocidad.

La temperatura media y temperatura de referencia será $T_0 = \frac{T_h + T_c}{2} = 307.9 \text{ K}$. Esta será la temperatura de operación (*Operating temperature*) que se introduce en el programa. La densidad puede seguir definiéndose dentro del modelo Boussinesq, pues se demuestra que las diferencias de las propiedades del fluido respecto a la temperatura pueden despreciarse. Se fija un coeficiente de expansión térmica $\beta = 1/T_0 = 0.00325 \text{ (K}^{-1}\text{)}$.

Se estudia el caso estacionario plano que tiene lugar bajo una aceleración de la gravedad igual a $g = 9.8 \text{ m/s}^2$ aplicada sobre el eje vertical en sentido descendente, un gradiente de temperaturas $\Delta T = 39.6^\circ\text{C}$ entre sus dos paredes laterales y $Ra = 1.43 \times 10^6$.

Para obtener una solución al problema, se emplea la malla seleccionada y los modelos de turbulencia escogidos previamente.

- *k-ε realizable*, dos ecuaciones.
- *k-w standard*, dos ecuaciones.
- *Transitional SST*, cuatro ecuaciones.

Respecto al resto de la configuración del caso, se mantienen los parámetros introducidos para el caso con menor Ra . El procedimiento llevado a cabo es encontrar primero la solución convergida para $Ra = 0.86 \times 10^6$, para, a continuación, resolver el problema con $Ra = 1.46 \times 10^6$, de este modo se inicializa el flujo convenientemente.

La distribución de temperaturas y perfiles de velocidad vertical a lo largo del ancho de la cavidad para las rectas de referencia puede compararse con los valores experimentales de Betts y Bokhari.

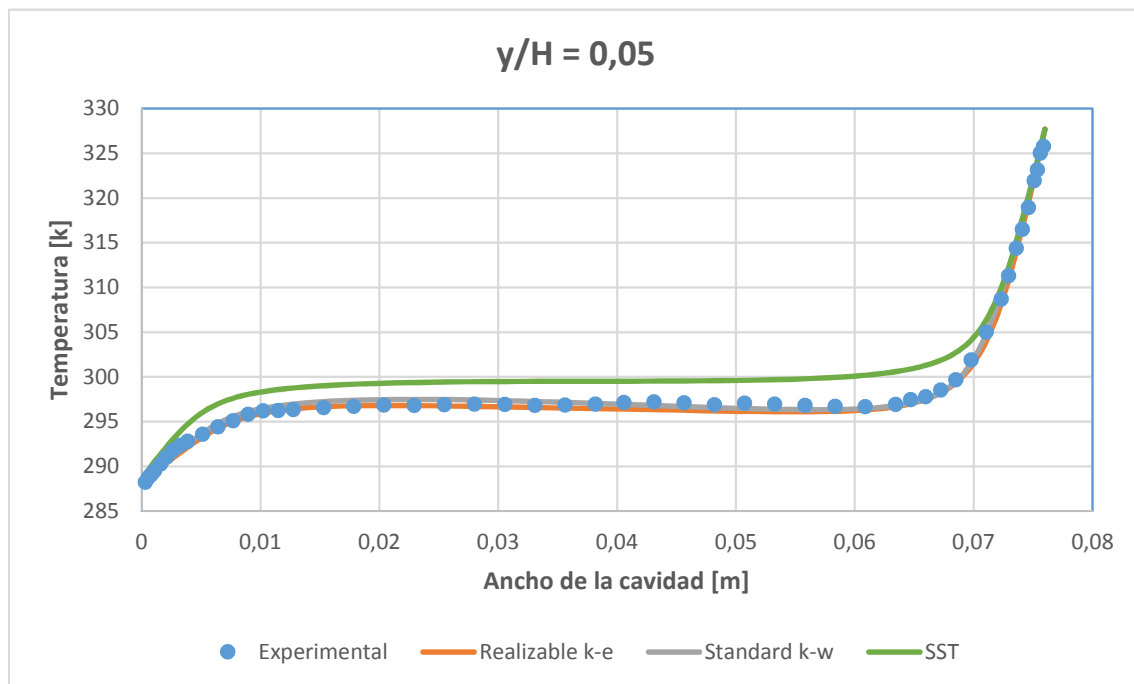


Figura 94. Perfiles de temperatura a lo largo de la recta $y/H = 0.05$, según modelos de turbulencia escogidos. $Ra = 0.86 \times 10^6$ y malla de 50×100 celdas.

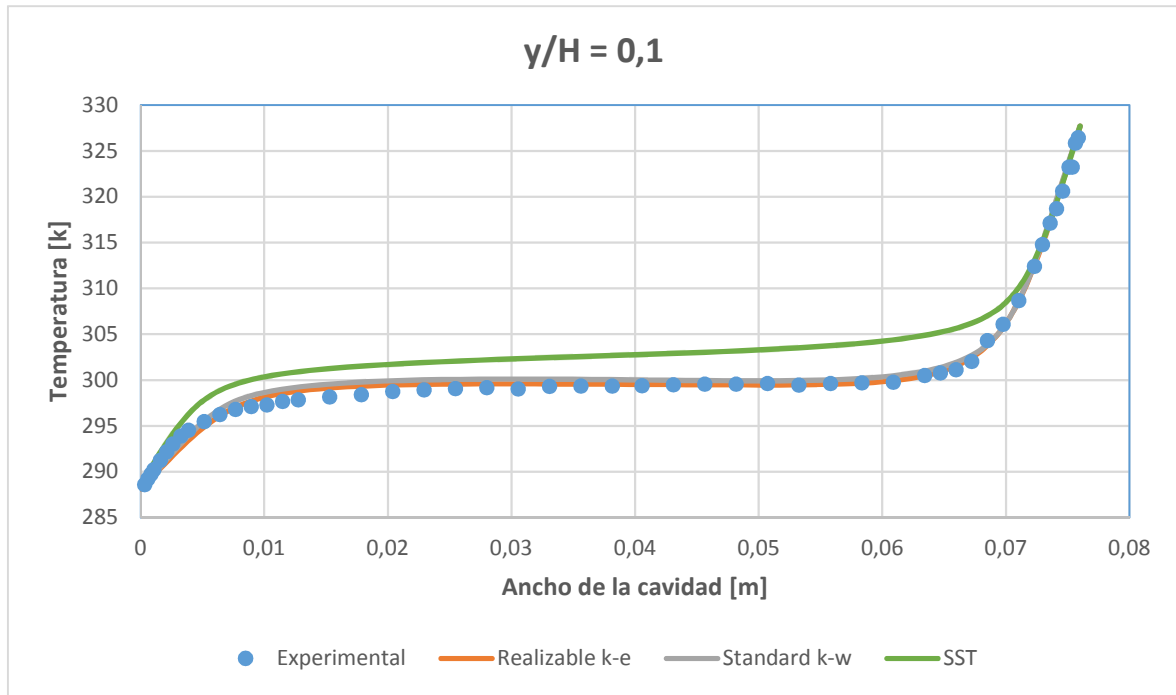


Figura 95. Perfiles de temperatura a lo largo de la recta $y/H = 0,1$, según modelos de turbulencia escogidos.
 $Ra = 0.86 \times 10^6$ y malla de 50×100 celdas.

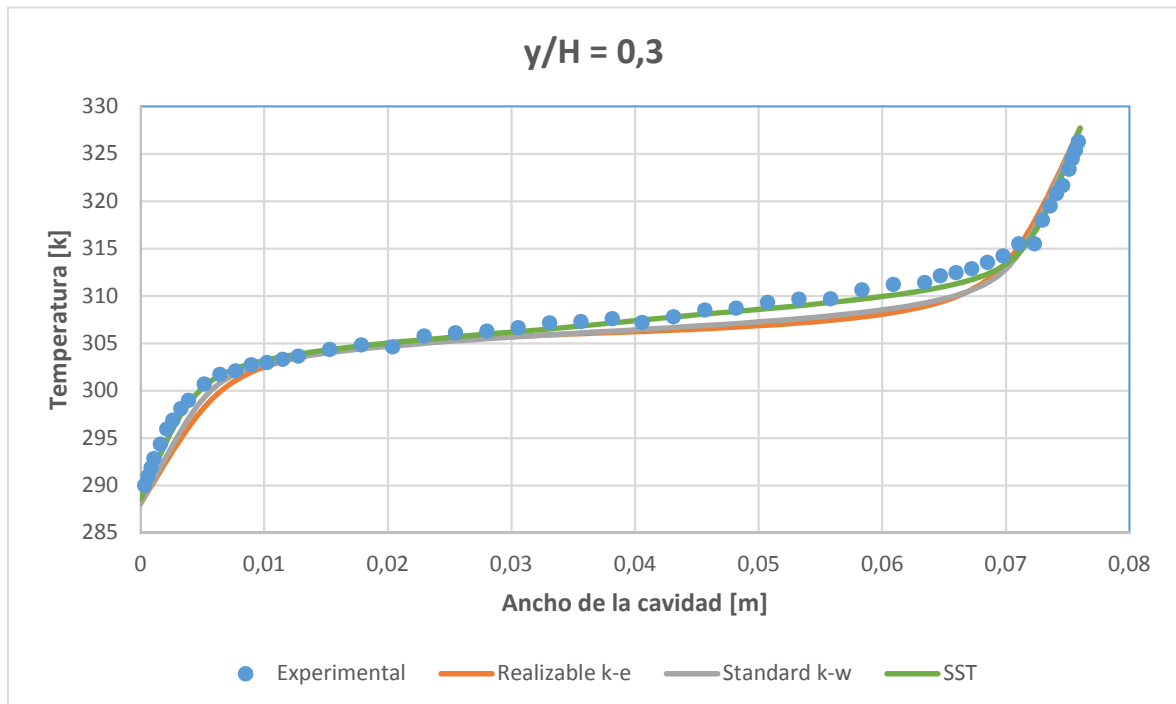


Figura 96. Perfiles de temperatura a lo largo de la recta $y/H = 0,3$, según modelos de turbulencia escogidos.
 $Ra = 0.86 \times 10^6$ y malla de 50×100 celdas.

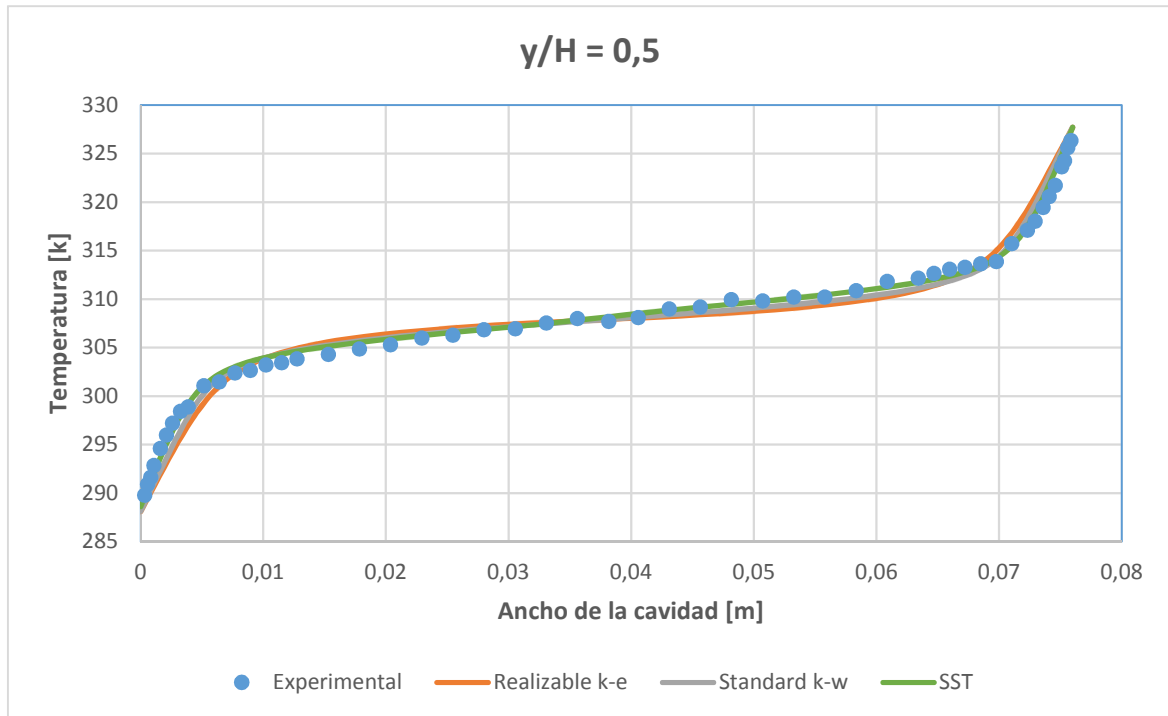


Figura 97. Perfiles de temperatura a lo largo de la recta $y/H = 0,5$, según modelos de turbulencia escogidos. $Ra = 0.86 \times 10^6$ y malla de 50×100 celdas.

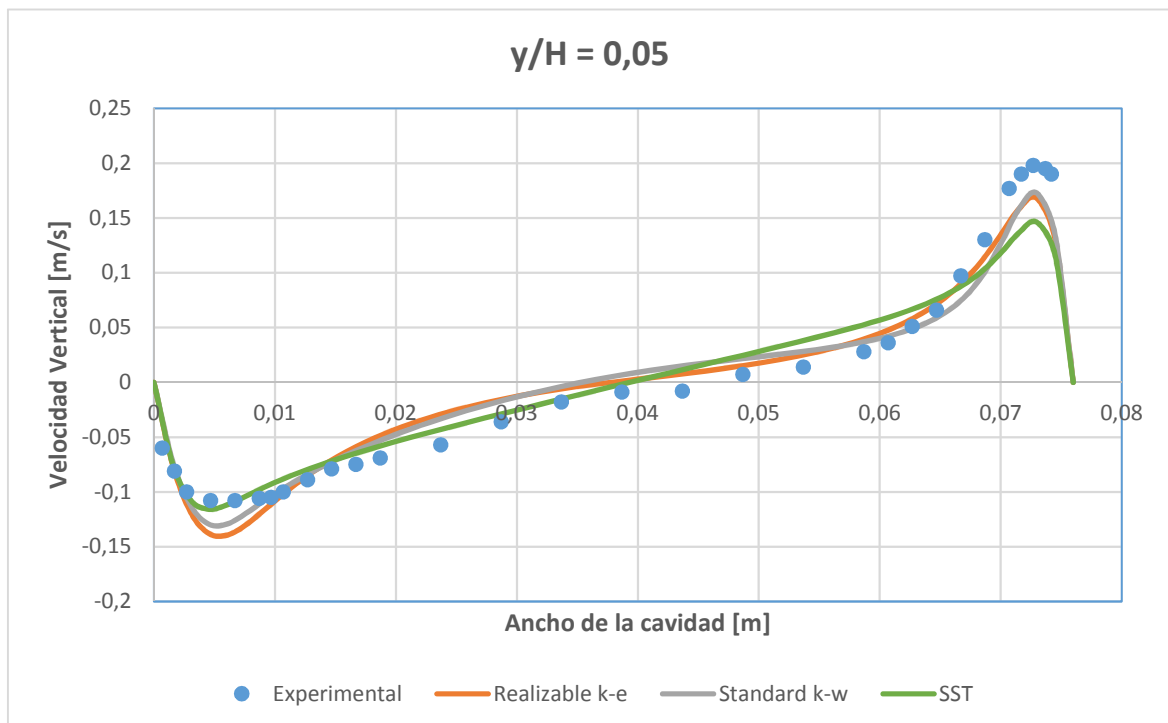


Figura 98. Distribución de velocidad vertical a lo largo de la recta $y/H = 0,05$, según modelos de turbulencia escogidos. $Ra = 0.86 \times 10^6$ y malla de 50×100 celdas.

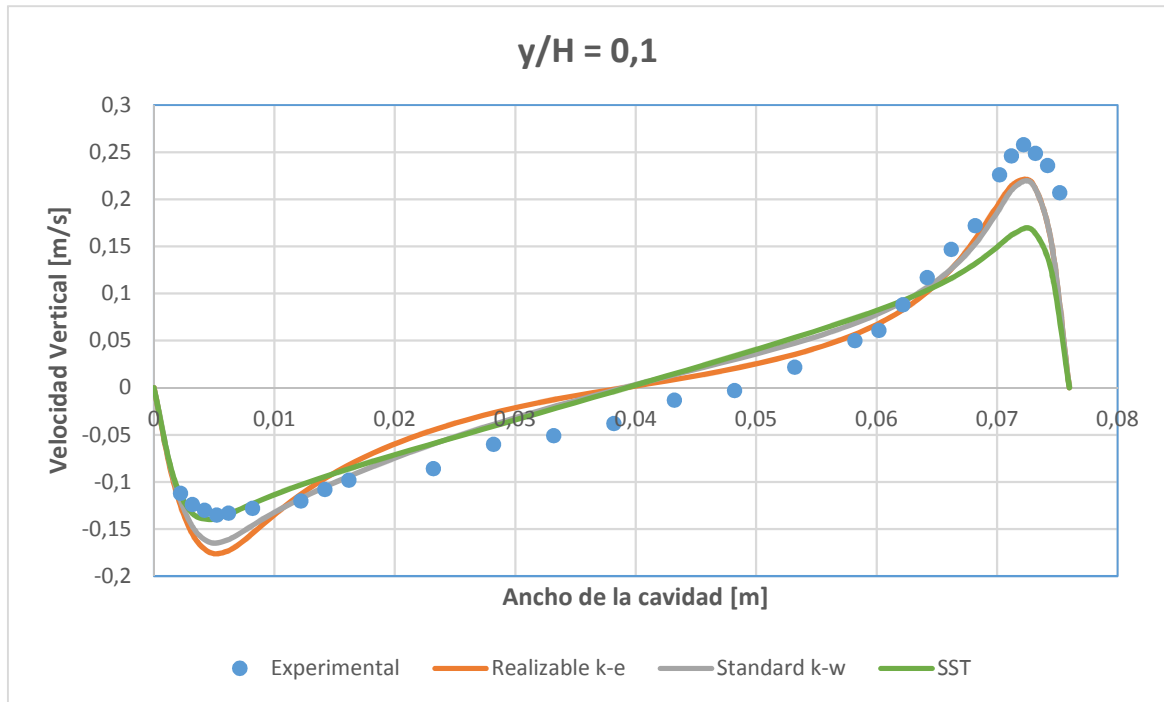


Figura 99. Distribución de velocidad vertical a lo largo de la recta $y/H = 0.1$, según modelos de turbulencia escogidos. $Ra = 0.86 \times 10^6$ y malla de 50×100 celdas.

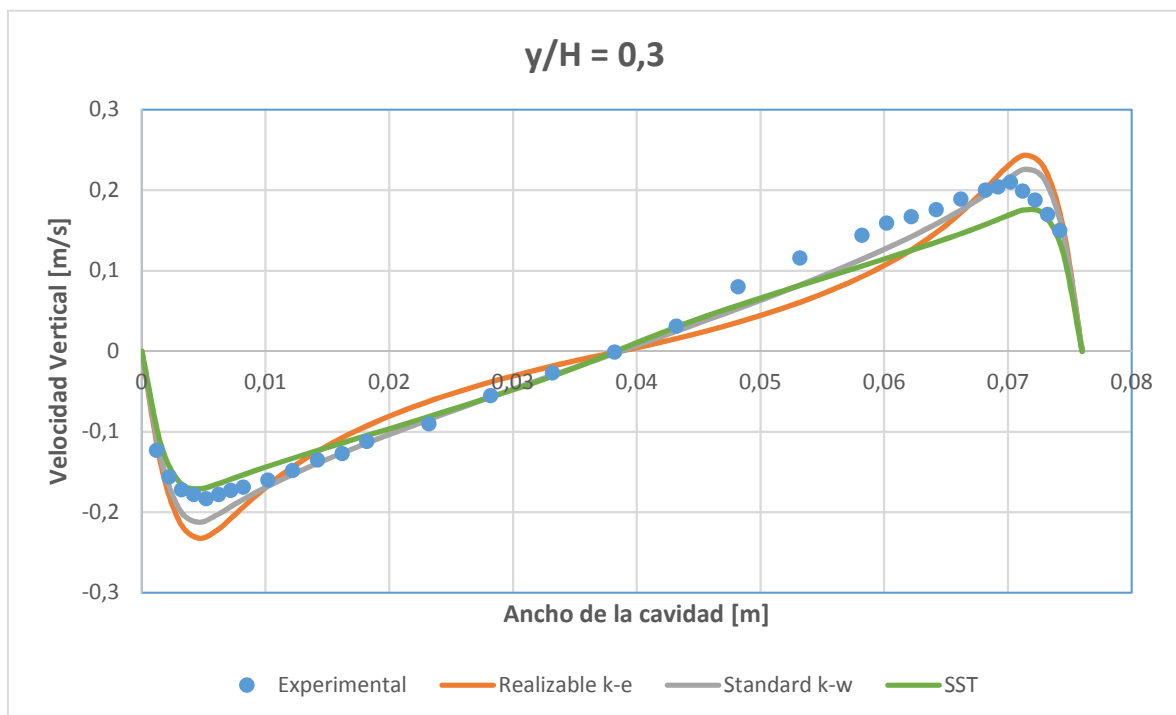


Figura 100. Distribución de velocidad vertical a lo largo de la recta $y/H = 0.3$, según modelos de turbulencia escogidos. $Ra = 0.86 \times 10^6$ y malla de 50×100 celdas.

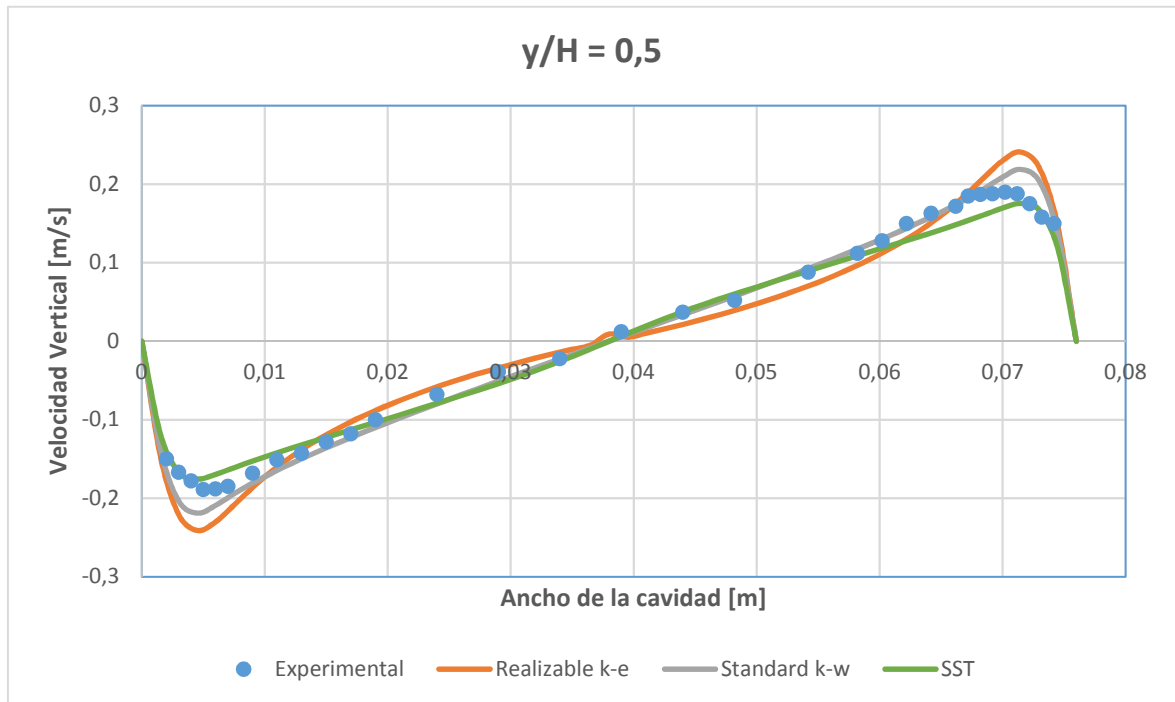


Figura 101. Distribución de velocidad vertical a lo largo de la recta $y/H = 0,5$, según modelos de turbulencia escogidos. $Ra = 0,86 \times 10^6$ y malla de 50×100 celdas.

Se aprecia claramente un comportamiento análogo al obtenido para el menor Rayleigh. El modelo *Transitional SST* ofrece rápidamente soluciones acertadas, siendo los modelos de dos ecuaciones los que mejor se aproximan a los valores experimentales. El modelo k-w (standard) es de nuevo el más preciso, proporcionando buenos resultados de velocidad y temperatura tanto en campo medio como regiones próximas a las paredes.

Se decide representar, por tanto, los contornos de temperatura en la cavidad y las líneas de corriente del flujo empleando el modelo standard k-w.

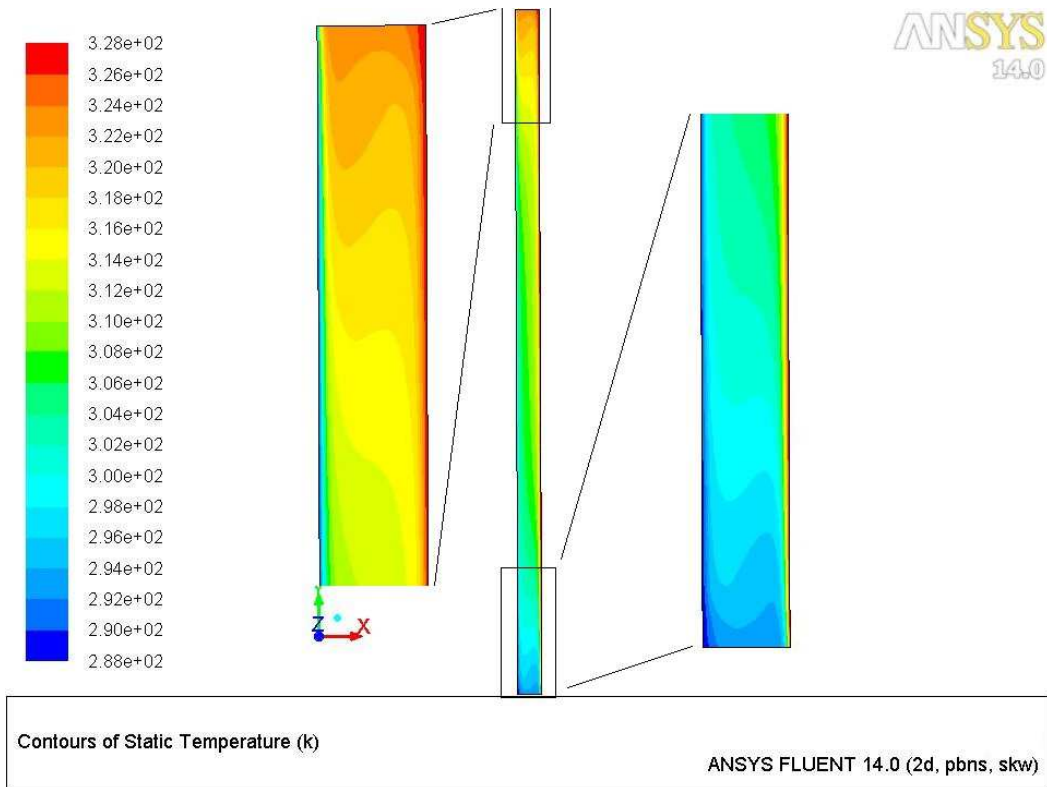


Figura 102. Distribución de temperaturas con el modelo standard $k-w$ y una malla de 50×100 celdas.
 $Ra = 1.43 \times 10^6$.

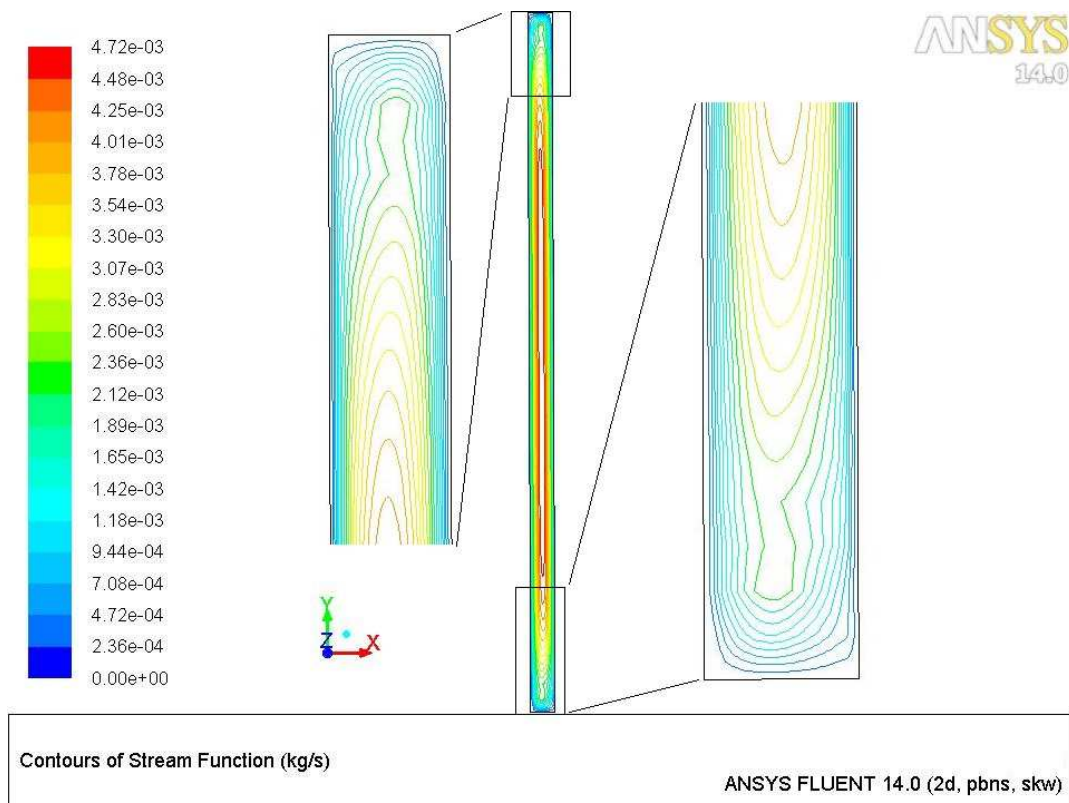


Figura 103. Líneas de corriente con el modelo standard $k-w$ y una malla de 50×100 celdas.
 $Ra = 1.43 \times 10^6$.

Las líneas de corriente muestran que se podrían haber obtenido resultados más precisos en la zona entre región media y regiones cercanas a la pared horizontal con una malla refinada adecuadamente. No obstante, dado que en general presentaba muy buenas prestaciones, se decidió mantener.

La tendencia que sigue la distribución del número de Nusselt en la dirección normal a las paredes laterales isotérmica es similar a la que se obtuvo para el menor Ra , con lo que puede considerarse un cálculo correcto.

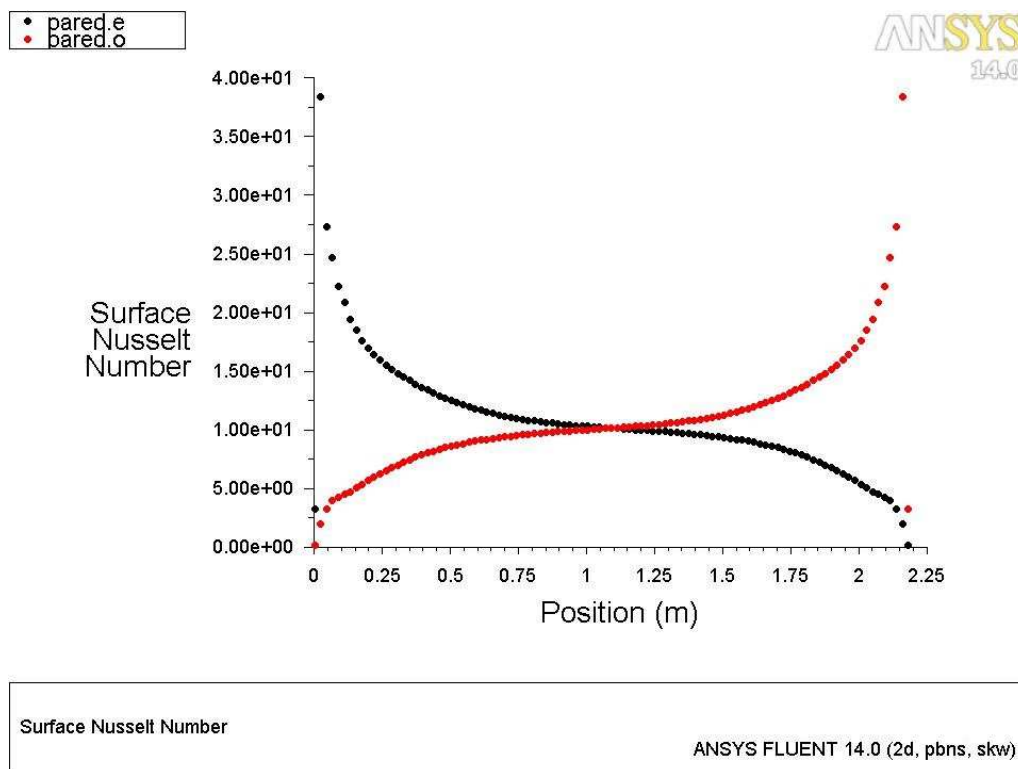


Figura 104. Distribución del número de Nusselt a lo largo de las paredes isotérmicas para modelo standard $k-w$, y $Ra = 1.43 \times 10^6$. Pared.e coincide con la pared caliente y Pared.o con la pared fría.

5.3. Cavidad confinada entre cilindros coaxiales

Debido a la imposibilidad de obtener un caso robusto que pudiese solucionarse en un tiempo relativamente bajo para el depósito cilíndrico, una vez obtenida una solución para los distintos experimentos de Betts y Bokhari (2000) [6], se decide estudiar el sistema compuesto por un fluido (aire) confinado en el espacio entre dos cilindros coaxiales verticales.

Como en el experimento de la cavidad rectangular, se mantienen a temperatura constante las paredes laterales, siendo las horizontales las adiabáticas. Por tanto, analizaremos la convección natural originada por un gradiente de temperaturas de $\Delta T = 19.6^{\circ}\text{C}$ y $\Delta T = 39.6^{\circ}\text{C}$ entre las paredes laterales de dos cilindros concéntricos.

Se modificará el sentido del gradiente de temperaturas, para estudiar que ocurre cuando el cilindro interior está más caliente o más frío, así como dos números de Rayleigh correspondientes a régimen turbulento. El resto de condiciones de contorno y parámetros del problema coinciden con los introducidos para los respectivos casos de la cavidad bidimensional.

Al someter al sistema a una diferencia de temperaturas longitudinal, se espera obtener resultados similares a los del Apartado 4.2. Incluir el cilindro interior cubre la necesidad de proporcionar una superficie de intercambio a distinta temperatura, a la par que proporciona un camino para el desarrollo del flujo.

El entorno a simular coincide con la cavidad axilsimétrica confinada en el hueco entre ambos cilindros. Esta cavidad es muy esbelta en la dirección vertical y su sección media tiene las dimensiones ya conocidas de altura H y base W , siendo en este caso, $W = R_2 - R_1$, o diferencia de los radios.

Dada la esbeltez de la cavidad, las dimensiones del cilindro también se modelan relativamente esbeltas, siendo $R_1 = 0.1$ m. y $R_2 = 0.176$ m., con lo que se obtiene $W = 0.076$ m. La geometría coincide, por tanto, con la modelada en la Figura 45 para la cavidad rectangular, pero para el caso axilsimétrico (no plano) con el eje de simetría coincidente con el eje vertical.

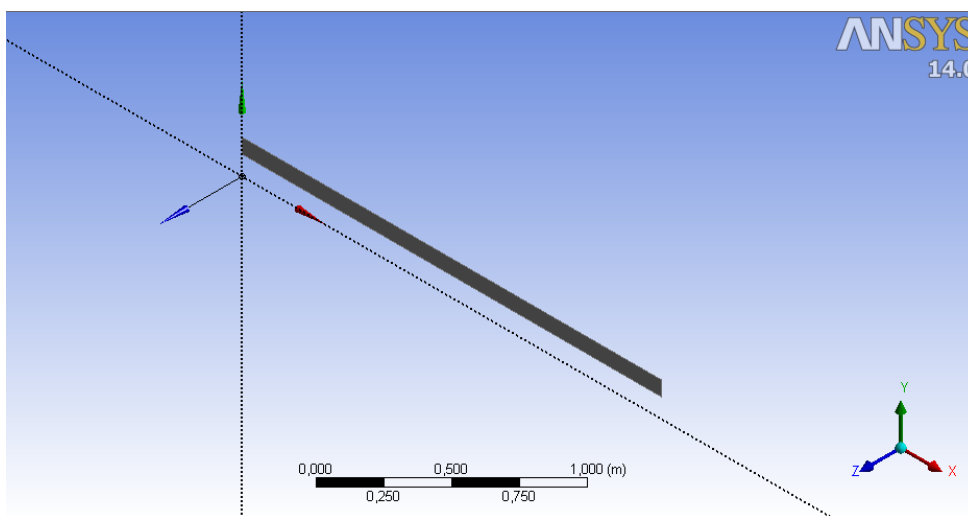


Figura 105. Vista tumbada de la geometría axilsimétrica modelada en Fluent para la cavidad confinada entre dos cilindros coaxiales. El eje x es el eje vertical de simetría.

Para este caso, ya no es una única relación de aspecto la que juega un papel importante, sino que aparecen dos cocientes de parámetros geométricos relacionados entre sí que afectan notablemente a la resolución del problema.

$$\Gamma_1 = \frac{H}{R_1} \quad (4.6)$$

$$\Gamma_2 = \frac{H}{R_2 - R_1} \quad (4.7)$$

La primera es la relación de aspecto del cilindro interior, que determina la segunda relación de aspecto correspondiente a la cavidad confinada entre los dos cilindros. Ambos parámetros deben ser esbeltos para conseguir una solución rápida y fiable del problema, pues desempeñan una función importante en la distribución de los flujos.

El resto de parámetros adimensionales coinciden con los de la cavidad rectangular.

La configuración de la malla correcta demostró ser un paso de vital importancia. La malla inicial de 50 x 100 celdas no proporcionaba soluciones satisfactorias y hubo de aumentar en 50 las celdas a lo largo del eje x. Esta malla cuadrática de distribución uniforme de 50 x 150 celdas demostró ser, aun así, bastante imprecisa. Para conseguir la convergencia de las ecuaciones, así como una solución estable del problema, hubo que aumentar los puntos de cálculo en las zonas próximas a las paredes respecto a los del campo medio. Para ello, se introdujo un factor Bias de 50 en las cuatro fronteras.

Las primeras soluciones satisfactorias no se obtuvieron hasta emplear esta malla refinada. A partir de aquí, posteriores refinamientos demostraron la independencia de la solución con el mallado.

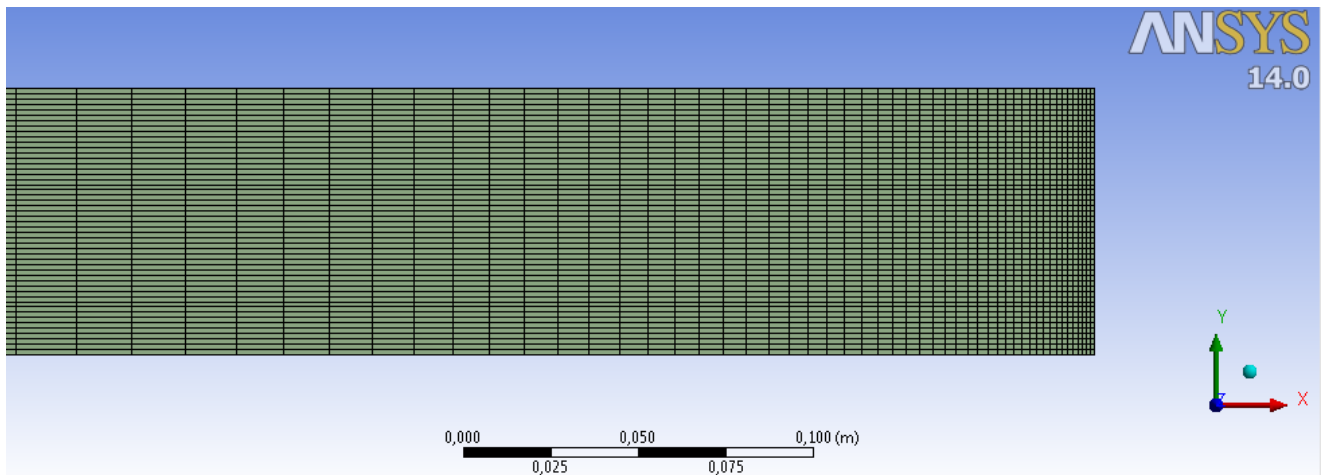


Figura 106. Vista ampliada de la malla cuadrática de 50 x 150 celdas empleada.

El caso se terminó de modelar empleando las mismas configuraciones que para el Apartado 4.2, excepto que esta vez, se decidió escoger la discretización Presto! para la presión buscando mayor rapidez en los cálculos.

Los resultados para las distintas configuraciones de temperatura empleando los tres modelos de turbulencia escogidos se exponen a continuación.

5.3.1. Cavity confinada entre cilindros coaxiales, $Ra = 0.86 \times 10^6$. Cilindro interior caliente.

Se aplica una diferencia de temperaturas de $\Delta T = 19.6^\circ\text{C}$, fijando una temperatura para la pared del cilindro interior en contacto con el fluido de $T_H = 307.7 \text{ K}$ y para la del cilindro exterior de $T_C = 288.1 \text{ K}$. Las bases de los cilindros son adiabáticas. Las cuatro paredes cumplen la condición de no deslizamiento o no slip para la velocidad.

La temperatura media $T_0 = \frac{T_H + T_C}{2} = 297.9 \text{ K}$ se determina como *Operating temperatura* y temperatura de referencia.

Sigue aplicándose la aproximación de Boussinesq y, por tanto, ha de introducirse el coeficiente de expansión térmica β .

Del análisis de los tres modelos escogidos, los resultados fueron similares a los obtenidos en la cavidad rectangular., resultando el modelo *standard k-w* el más preciso tanto en temperatura como en velocidad.

La configuración de los modelos fue la misma que para los casos anteriores.

Se presentan a continuación la distribución de temperaturas, velocidad y Nusselt de los tres modelos.

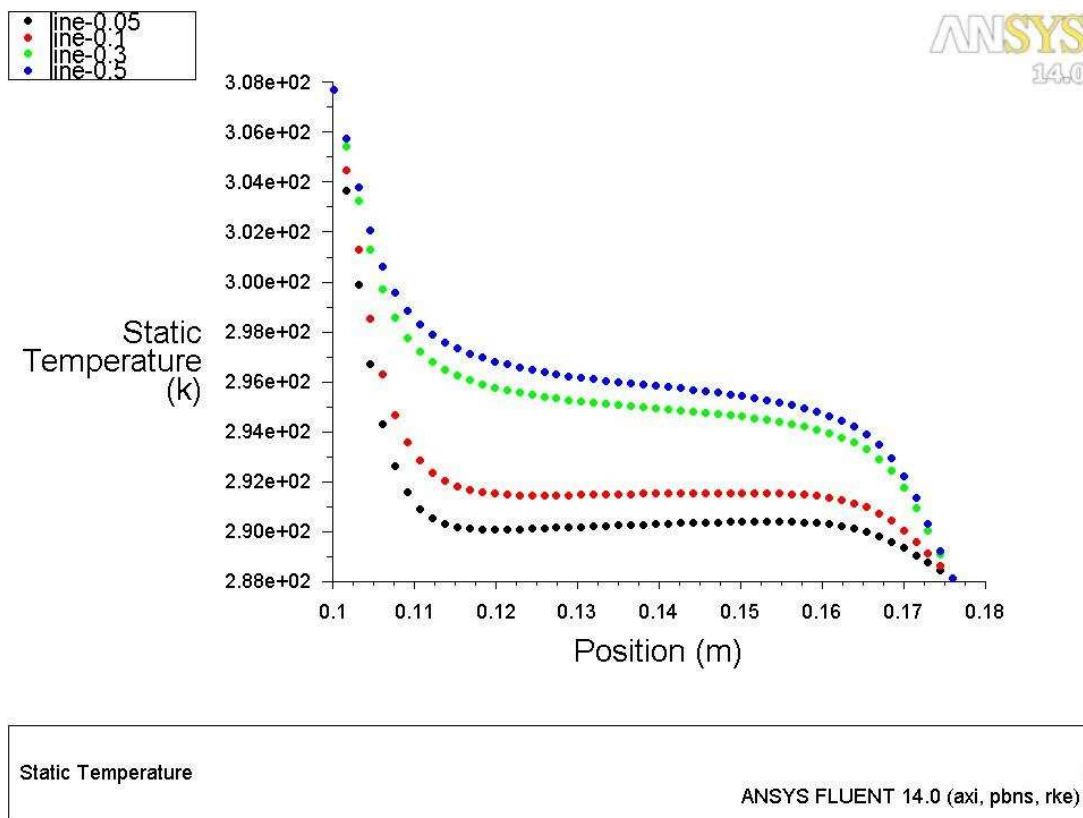


Figura 107. Distribución de temperaturas según modelo realizable k-ε a lo largo de las rectas de referencia $y/H = 0.05$, $y/H = 0.1$, $y/H = 0.3$, $y/H = 0.5$.

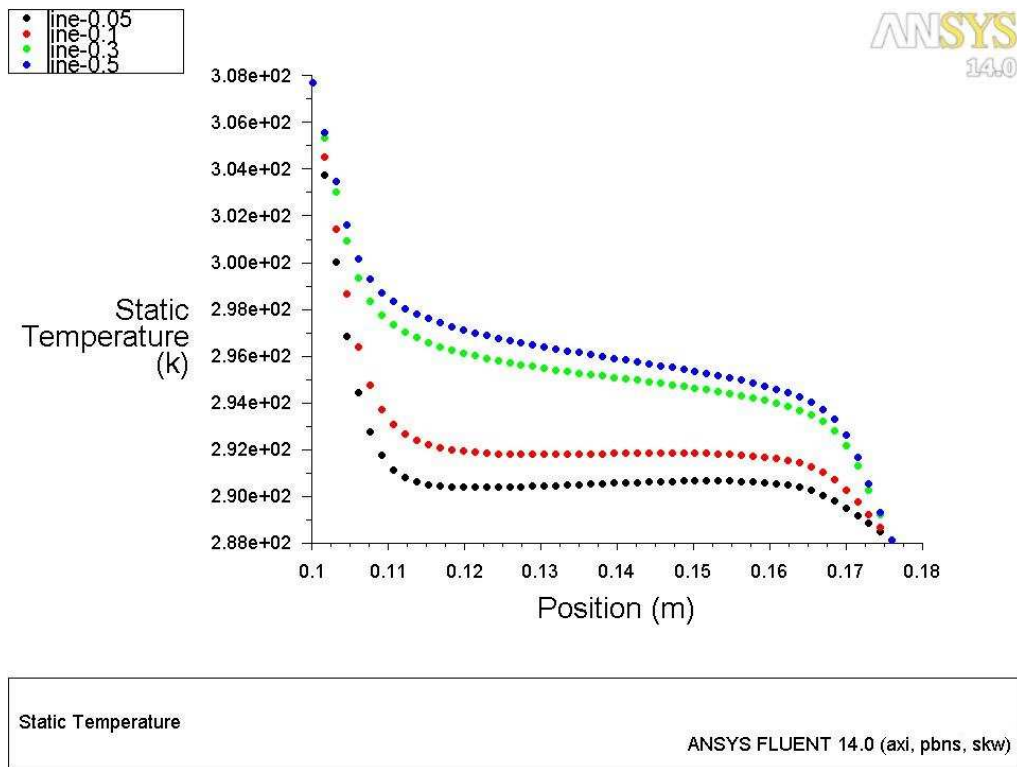


Figura 108. Distribución de temperaturas según modelo standard $k-w$ a lo largo de las rectas de referencia $y/H = 0.05$, $y/H = 0.1$, $y/H = 0.3$, $y/H = 0.5$.

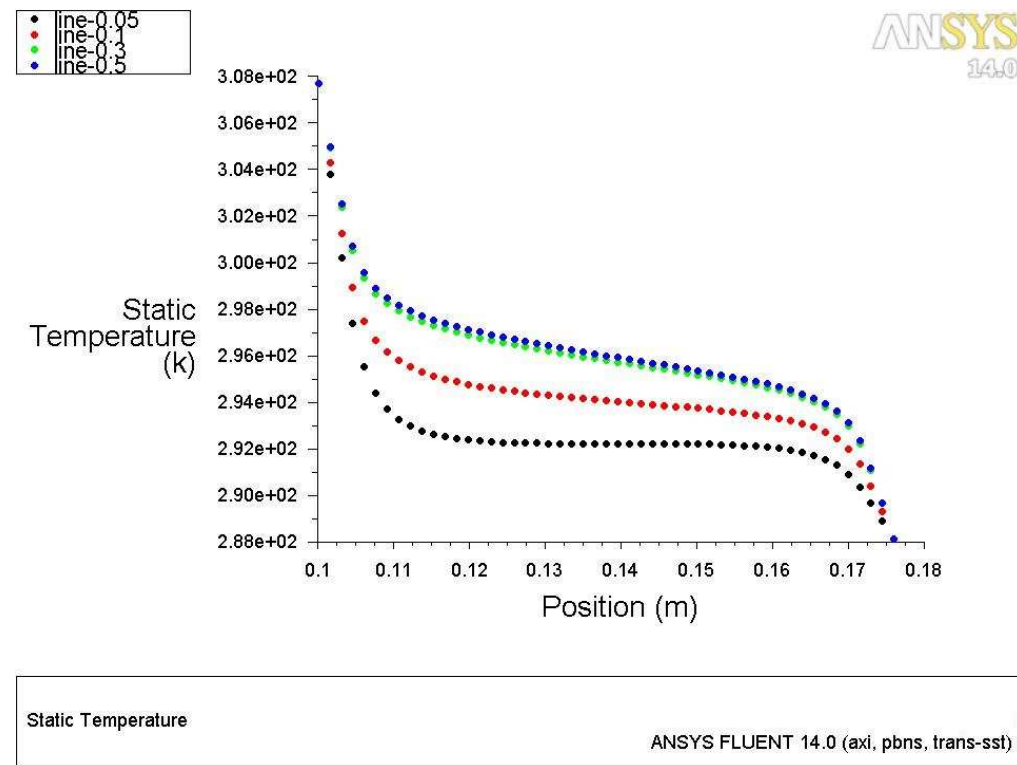


Figura 109. Distribución de temperaturas según modelo transicional SST a lo largo de las rectas de referencia $y/H = 0.05$, $y/H = 0.1$, $y/H = 0.3$, $y/H = 0.5$.

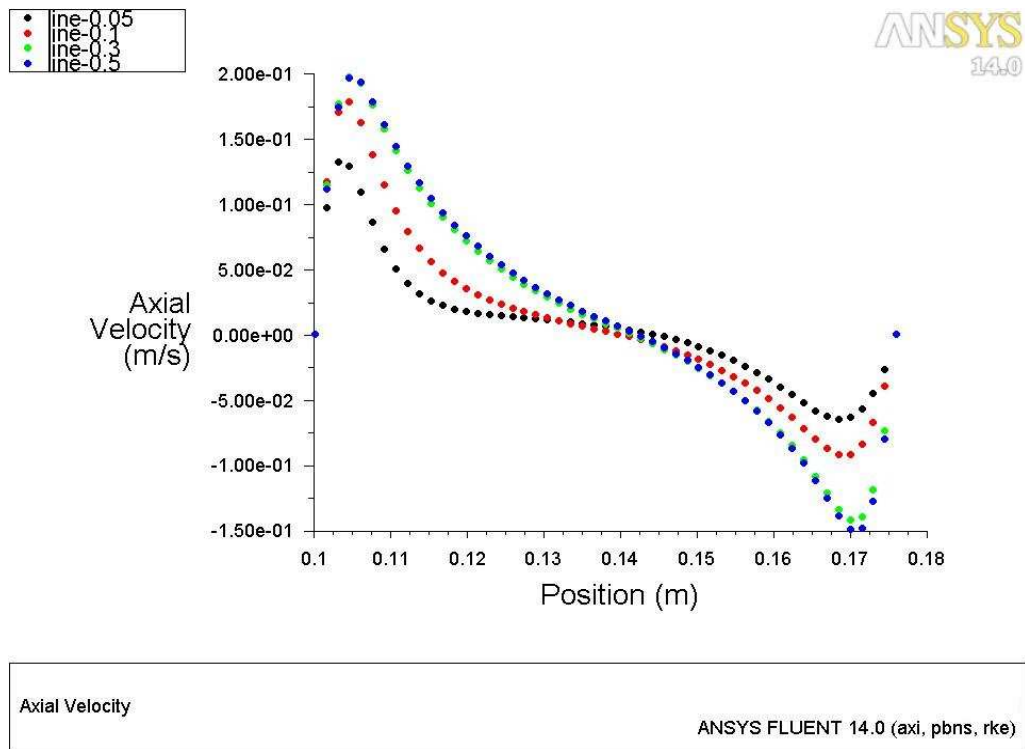


Figura 110. Valor de la velocidad axial (vertical) según modelo realizable $k-\epsilon$ a lo largo de las rectas de referencia $y/H = 0.05$, $y/H = 0.1$, $y/H = 0.3$, $y/H = 0.5$.

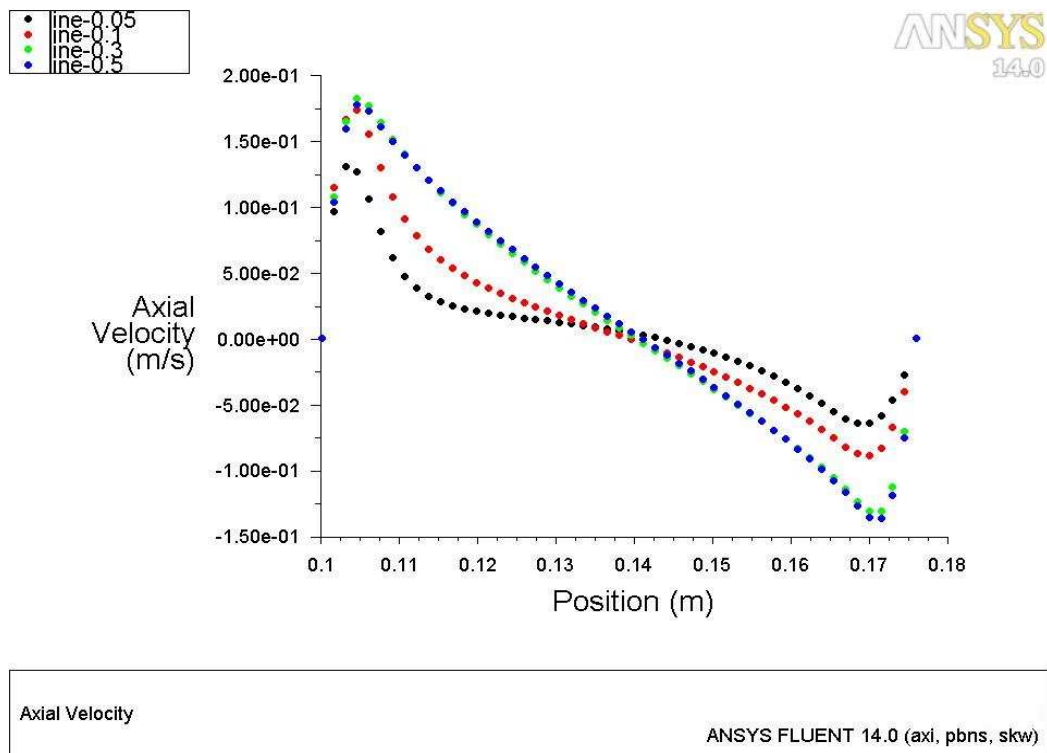


Figura 111. Distribución de la velocidad axial (vertical) según modelo standard $k-\omega$ a lo largo de las rectas de referencia $y/H = 0.05$, $y/H = 0.1$, $y/H = 0.3$, $y/H = 0.5$.

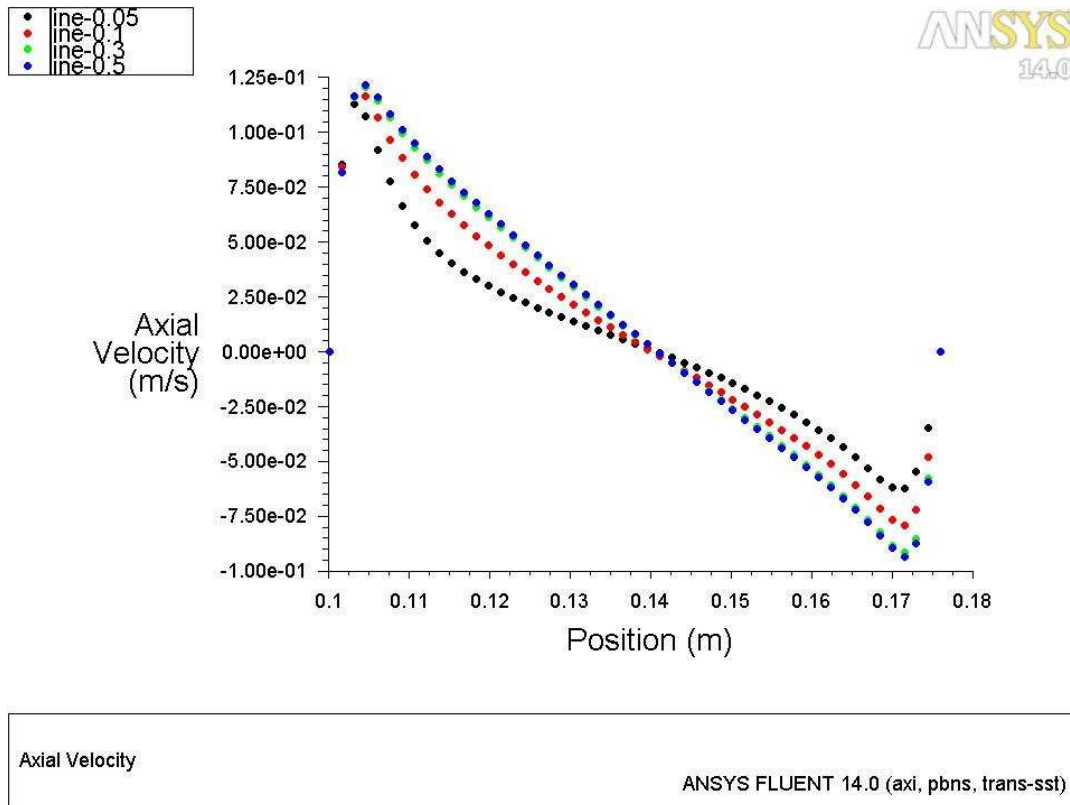


Figura 112. Distribución de la velocidad axial (vertical) según modelo transicional SST a lo largo de las rectas de referencia $y/H = 0.05$, $y/H = 0.1$, $y/H = 0.3$, $y/H = 0.5$.

Se puede apreciar cómo los valores siguen aproximadamente las mismas tendencias que en el caso bidimensional, principalmente respecto a la temperatura. Las velocidades que se pueden registrar en este problema son mucho más oscilantes, lo que motiva un régimen turbulento más fuerte.

Esta simultaneidad permite determinar que el movimiento convectivo es estable, con el flujo caliente ascendiendo por la pared del cilindro interior hasta alcanzar la base superior y el flujo frío descendiendo por el interior del cilindro exterior hasta la base inferior.

La distribución del número de Nusselt a lo largo de las paredes calentadas isotérmicamente muestra una clara dependencia del flujo de calor con el área o superficie de contacto con el fluido.

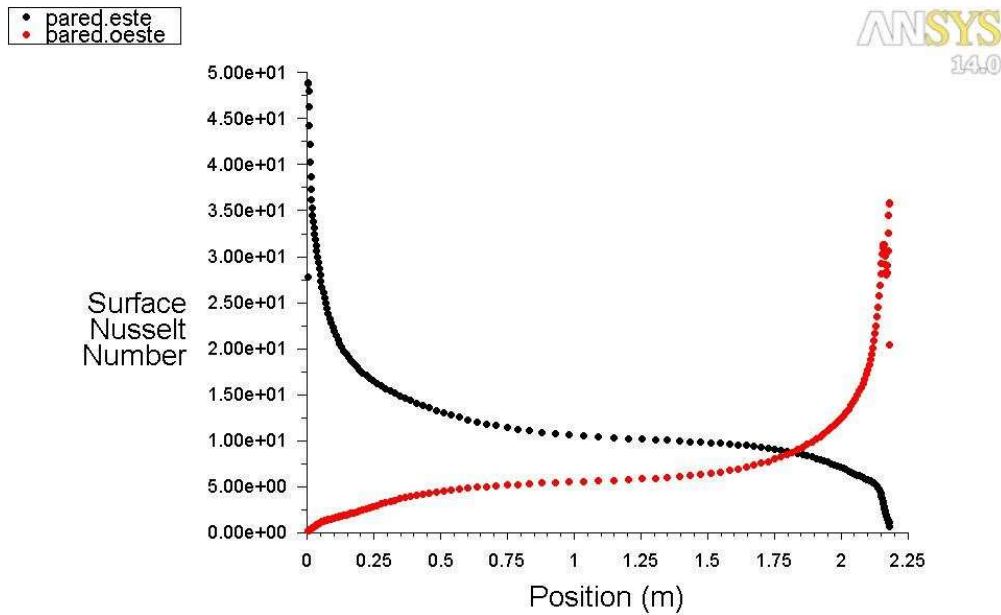


Figura113. Distribución del número de Nusselt a lo largo de las paredes isotérmicas para modelo realizable k- ϵ , y $Ra = 0.86 \times 10^6$. Pared.e coincide con la pared caliente del cilindro interior y Pared.o con la pared fría del cilindro exterior.

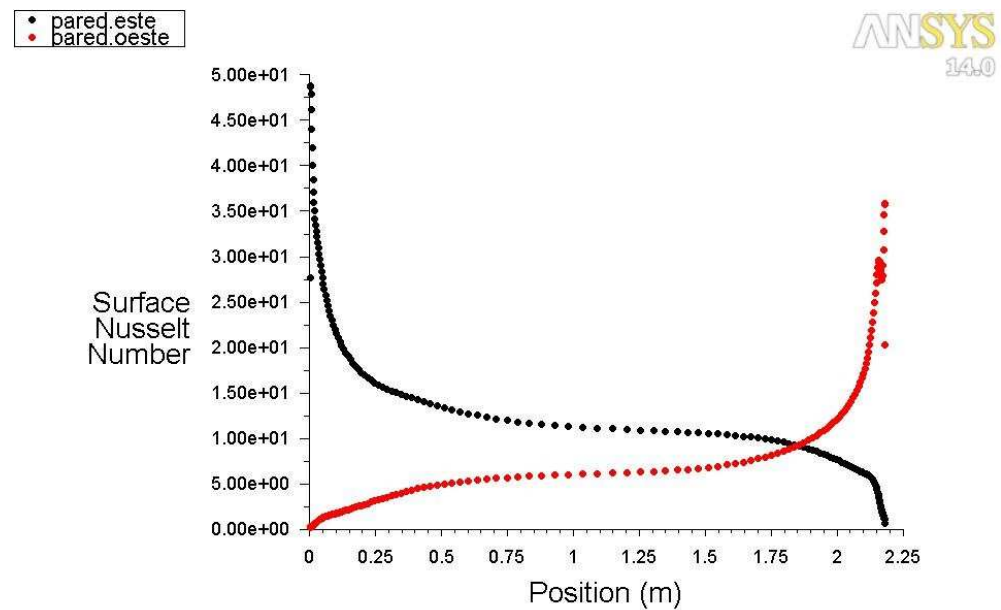


Figura 114. Distribución del número de Nusselt a lo largo de las paredes isotérmicas para modelo standard k- ω , y $Ra = 0.86 \times 10^6$. Pared.e coincide con la pared caliente del cilindro interior y Pared.o con la pared fría del cilindro exterior.

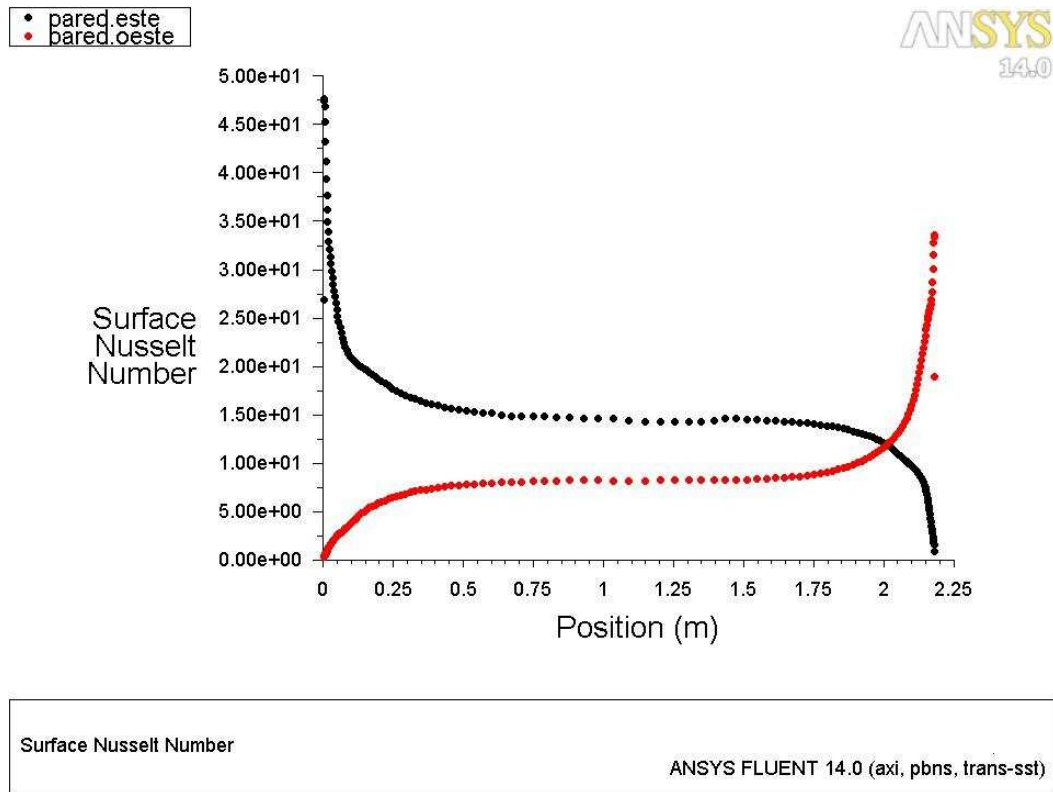


Figura 115. Distribución del número de Nusselt a lo largo las paredes isotérmicas para modelo transicional SST y $Ra = 0.86 \times 10^6$. Pared.e coincide con la pared caliente del cilindro interior y Pared.o con la pared fría del cilindro exterior.

En este caso, la pared fría o cilindro exterior, muestra un número en general menor que para la pared del cilindro caliente. Esto se debe a la mayor área que representa y, por tanto, un flujo de calor por unidad de superficie menor.

La tendencia que siguen las distribuciones, en especial para la pared caliente, sigue la misma tendencia que aportaron **Hsieh y Lien (2004)** [30] y se encuentra representada en la *Figura 58*.

Los resultados análogos al caso anterior permiten escoger el modelo estándar k-w como el más preciso. Este modelo es el que más tiempo toma en solucionar las ecuaciones del flujo, pero se comprueba que es el que más casos puede simular y el que presenta mejores soluciones.

En los perfiles de temperatura se observa como el flujo frío se desarrolla bastante más que el flujo caliente. El gradiente de temperatura en la zona caliente es bastante mayor que en la fría. Esto se explica sabiendo que en, en estas regiones, la velocidad es mayor debido al menor área de contacto, lo que provoca el aumento de la turbulencia, la disminución de la capa límite y, por tanto, una distribución más heterogénea de la temperatura.

Mediante las líneas de corriente se confirma que los valores de mayor velocidad global se concentran entre la pared caliente y la base superior, provocando una mayor mezcla de temperaturas en esa región.

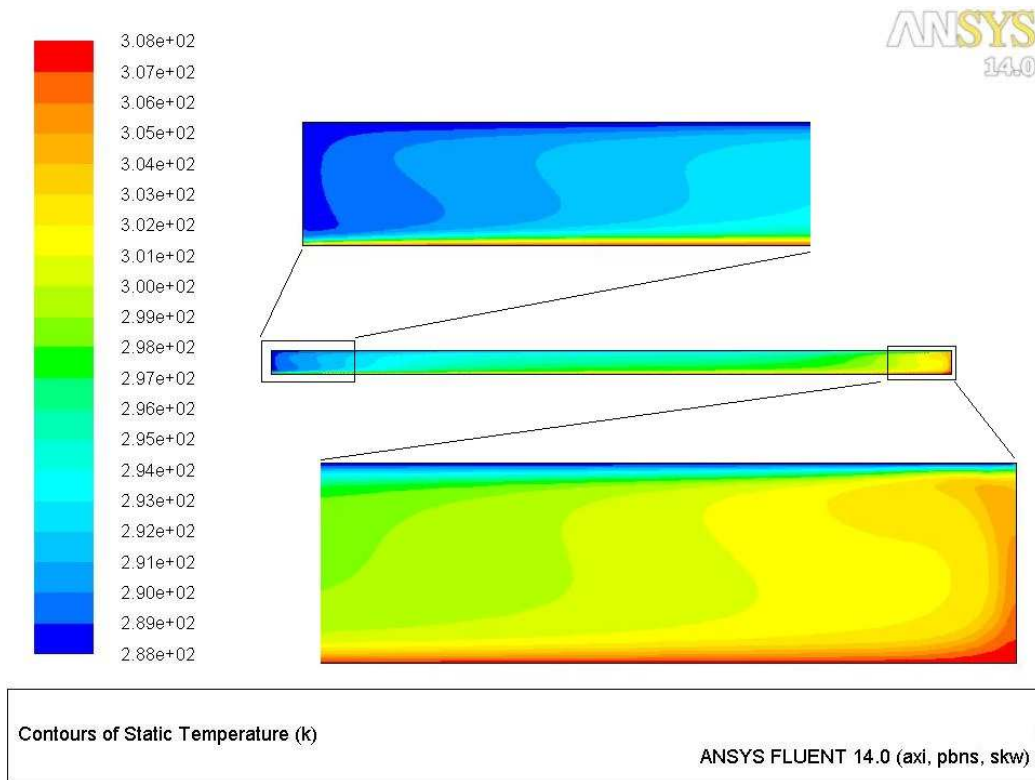


Figura 116. Distribución de temperaturas con el modelo standard k-w. $Ra = 0.86 \times 10^6$. Cilindro interior caliente.

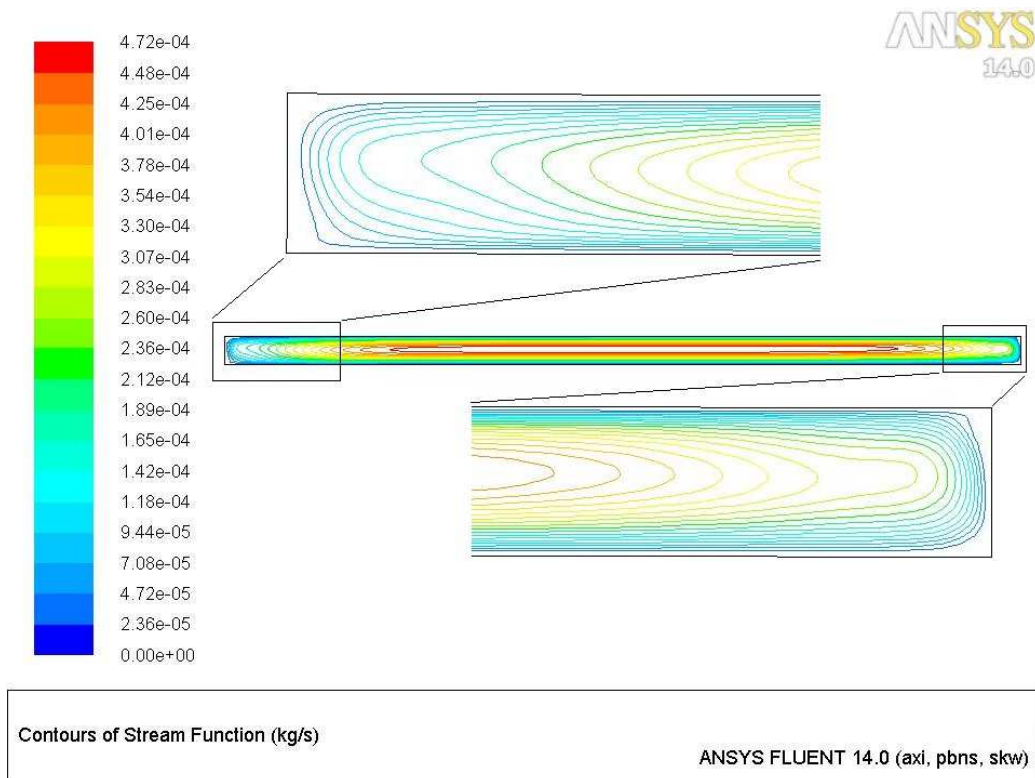


Figura 117. Líneas de corriente con el modelo standard k-w. $Ra = 0.86 \times 10^6$. Cilindro interior caliente.

5.3.2. Cavity confinada entre cilindros coaxiales, $Ra = 0.86 \times 10^6$. Cilindro interior frío.

Se decide simular de nuevo la convección natural con $Ra = 0.86 \times 10^6$ cuando se invierte el gradiente de temperaturas. Es decir, en este caso, el cilindro interior estará más frío que el exterior.

De este modo, se podrá comprobar si el mayor desarrollo de un flujo u otro es dependiente de la temperatura o del área.

Se detecta, de nuevo, el mismo comportamiento que en el resto de casos para los tres modelos escogidos. Tanto el modelo *realizable k-e* como el *estándar k-w* presentan mejores resultados para la temperatura que el modelo *transitional SST*, el cual presenta valores más homogéneos.

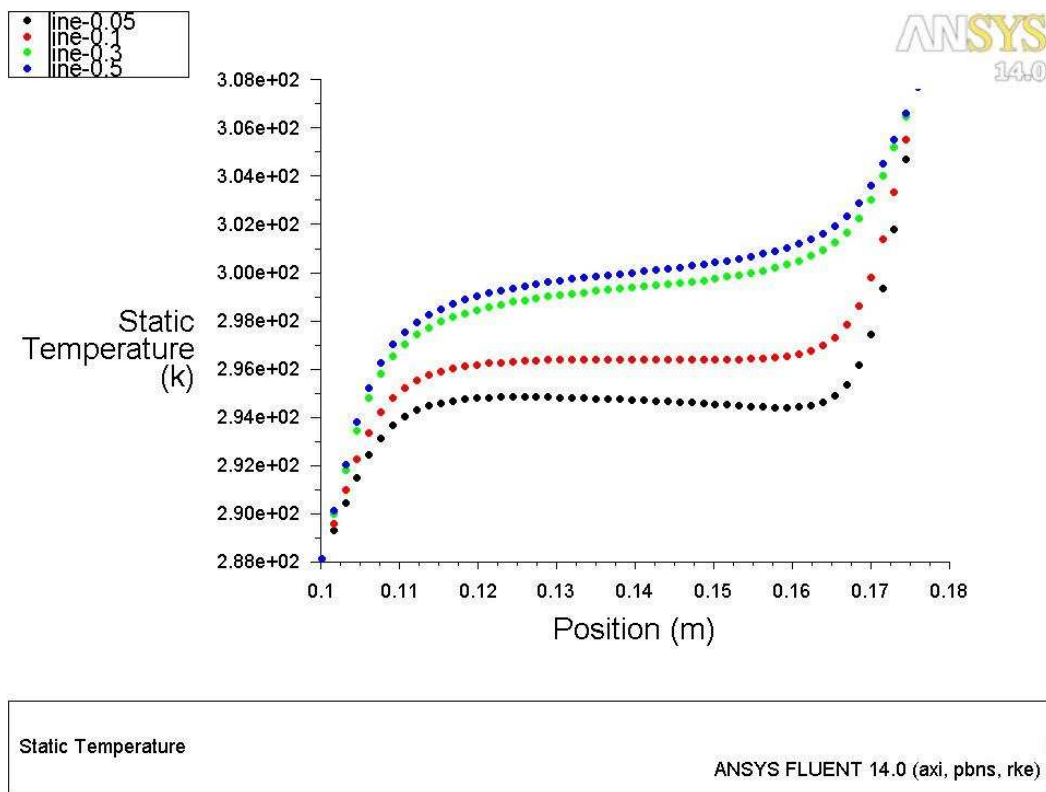


Figura 118. Distribución de temperaturas según modelo *realizable k-e* a lo largo de las rectas de referencia $y/H = 0.05$, $y/H = 0.1$, $y/H = 0.3$, $y/H = 0.5$.

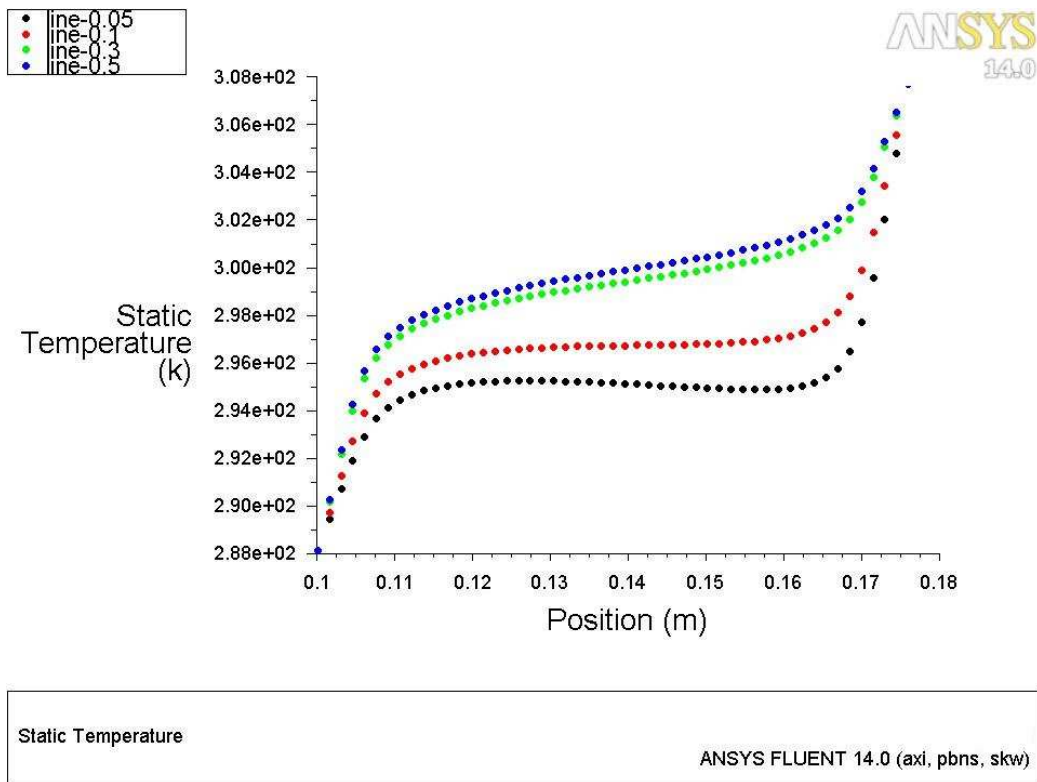


Figura 119. Distribución de temperaturas según modelo standard $k-w$ a lo largo de las rectas de referencia $y/H = 0.05$, $y/H = 0.1$, $y/H = 0.3$, $y/H = 0.5$.

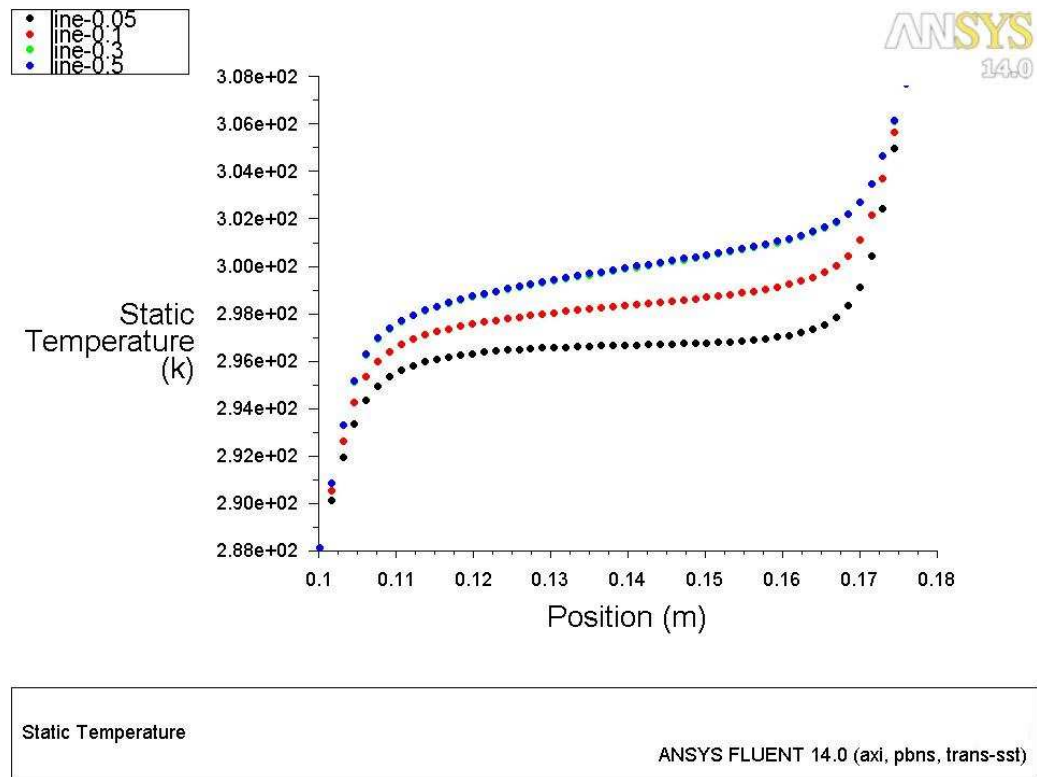


Figura 120. Distribución de temperaturas según modelo transicional SST a lo largo de las rectas de referencia $y/H = 0.05$, $y/H = 0.1$, $y/H = 0.3$, $y/H = 0.5$.

Respecto al campo de velocidades verticales (axial), los dos modelos de dos ecuaciones proporcionan valores muy parecidos, siendo k-w más suave en las transiciones.

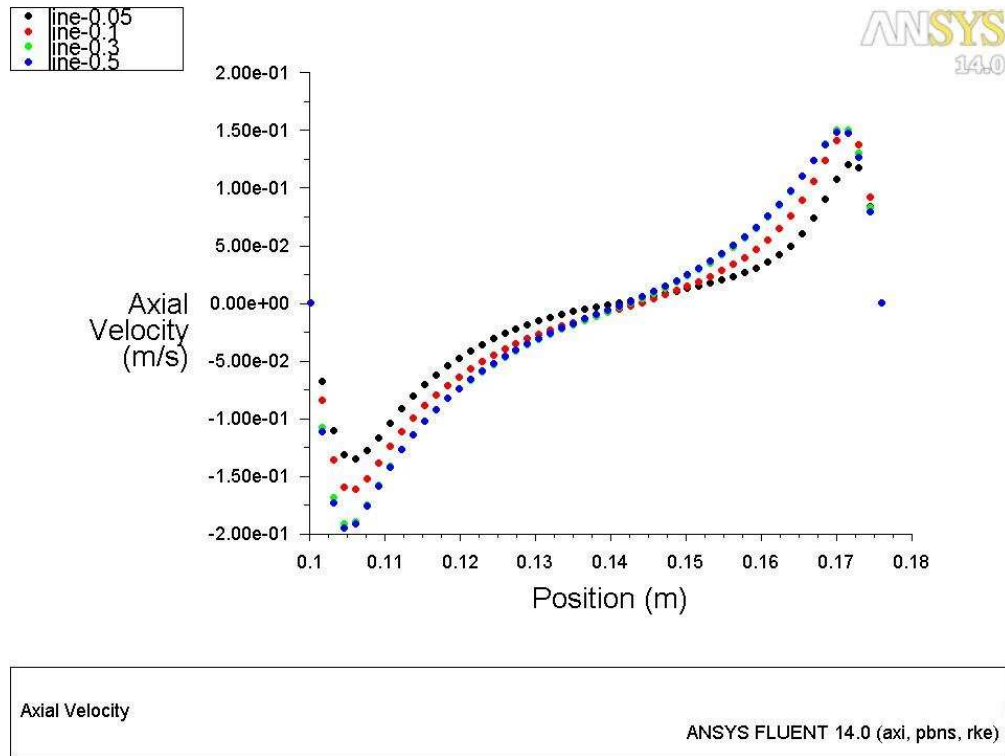


Figura 121. Distribución de velocidades axiales según modelo realizable k-e a lo largo de las rectas de referencia $y/H = 0.05$, $y/H = 0.1$, $y/H = 0.3$, $y/H = 0.5$.

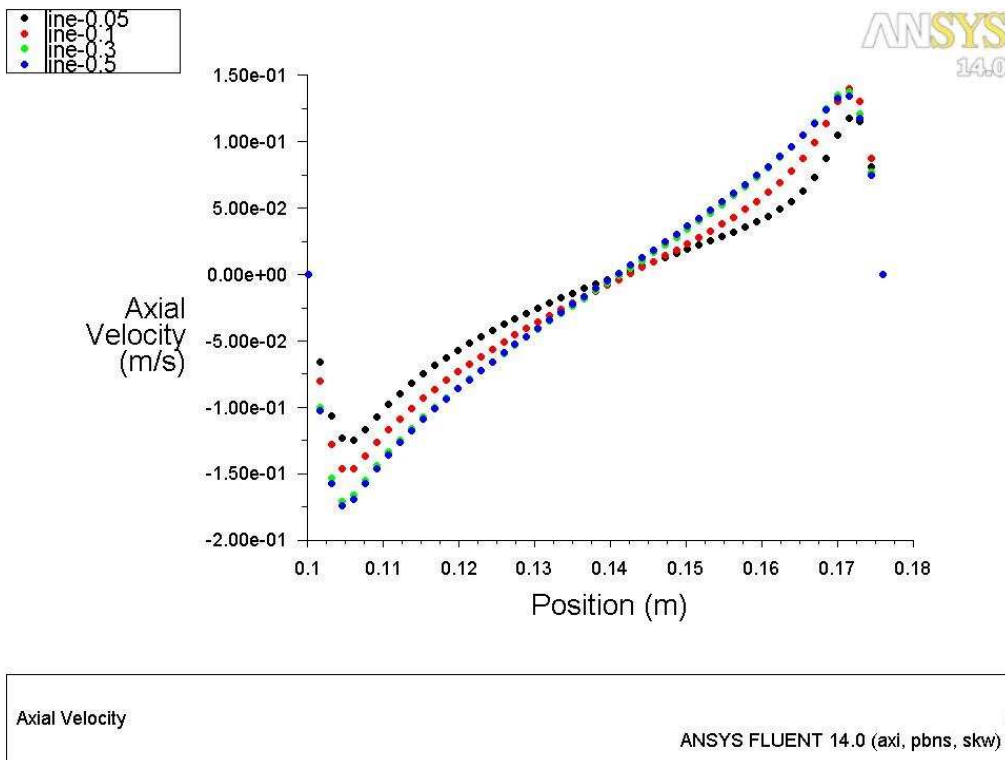


Figura 122. Distribución de velocidades axiales según modelo standard k-w a lo largo de las rectas de referencia $y/H = 0.05$, $y/H = 0.1$, $y/H = 0.3$, $y/H = 0.5$.

Acorde a las conclusiones presentadas anteriormente, se selecciona el modelo standard $k-w$ para presentar el resto de resultados.

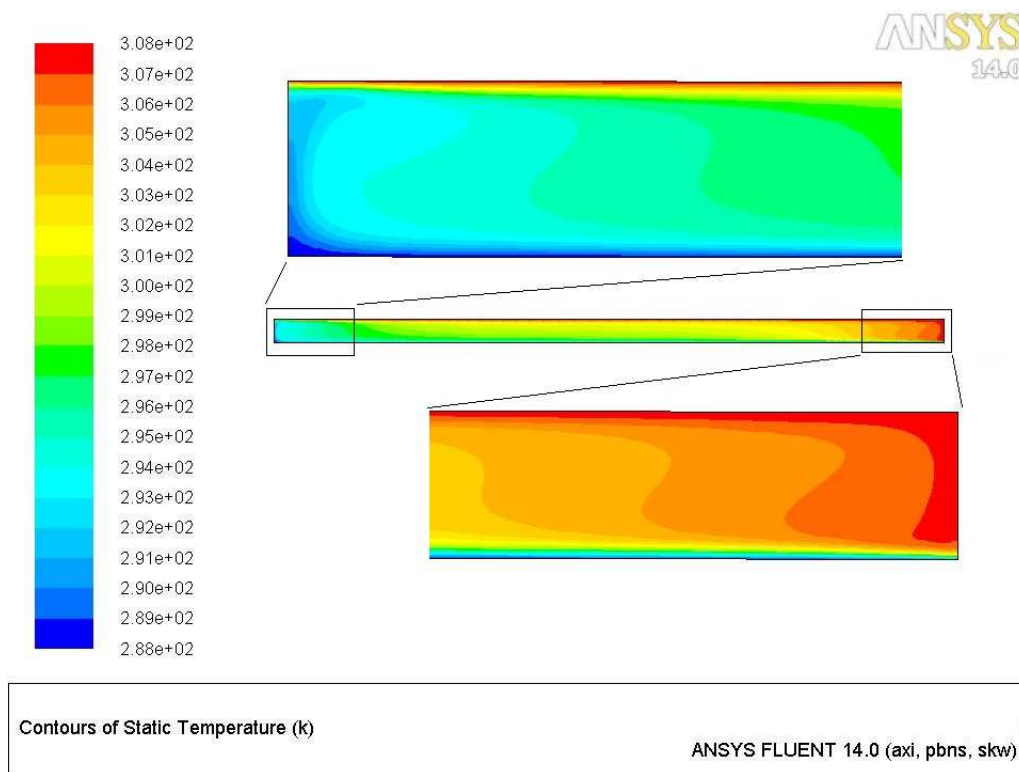


Figura 123. Distribución de temperaturas con el modelo standard $k-w$. $Ra = 0.86 \times 10^6$. Cilindro interior frío.

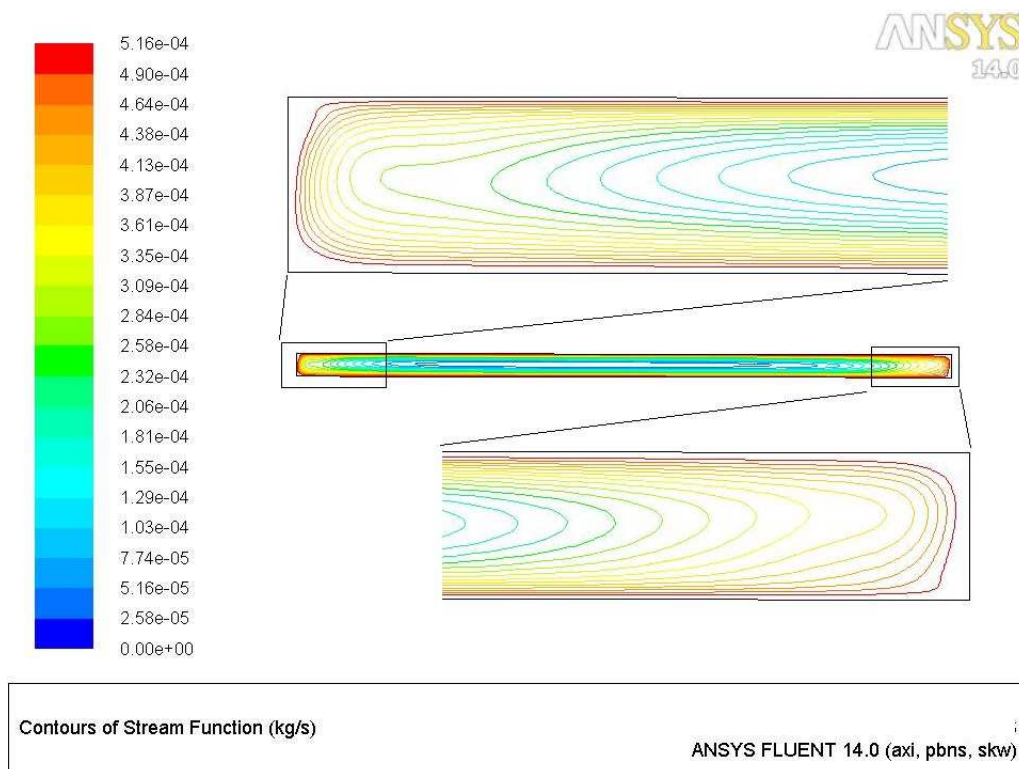


Figura 124. Líneas de corriente con el modelo standard $k-w$. $Ra = 0.86 \times 10^6$. Cilindro interior frío.

A partir de las figuras anteriores, se puede determinar, por un lado, que el valor del radio del cilindro interior juega un papel muy importante en el flujo convectivo. En este caso, el flujo frío desciende por esta pared de menor superficie, por lo que su velocidad aumenta produciéndose un mayor mezclado de la temperatura y, por tanto, un gradiente mayor que para el flujo caliente ascendente. Por el contrario, el flujo caliente presenta menores velocidades al tener que expandirse a una mayor área y su distribución es más estratificada.

Se puede concluir que, dependiendo de que subflujo interese que se desarrolle más, se puede configurar el gradiente de temperaturas en sentido positivo o negativo con la dirección longitudinal.

Por otro lado, también es notorio observar que las magnitudes de las líneas de corriente son totalmente inversas al caso con el cilindro interior caliente. En esta configuración, el flujo convectivo es de sentido contrario, es decir, el flujo caliente asciende por el cilindro exterior mientras el flujo frío desciende por el cilindro interior.

Las magnitudes máximas de función de corriente se encuentran en las regiones exteriores del flujo, mientras que los valores mínimos se encuentran antes de llegar a la zona de remanso central. Esto se debe sin duda al sentido del gradiente de temperaturas.

Respecto al Nusselt, se aprecia que su tendencia sigue siendo idéntica a la esperada. Los valores máximos se encuentran, ésta vez, en la pared fría. Esto pone de manifiesto la dependencia del flujo de calor con el área de contacto. Dado que el flujo frío se desarrolla tangencialmente a la pared del cilindro interior, de menor área que el exterior, el flujo de calor transferido será mayor. También se puede explicar mediante la velocidad, como el flujo caliente viaja a velocidades menores, su transferencia de calor convectivo es menor, provocando una disminución del número de Nusselt.

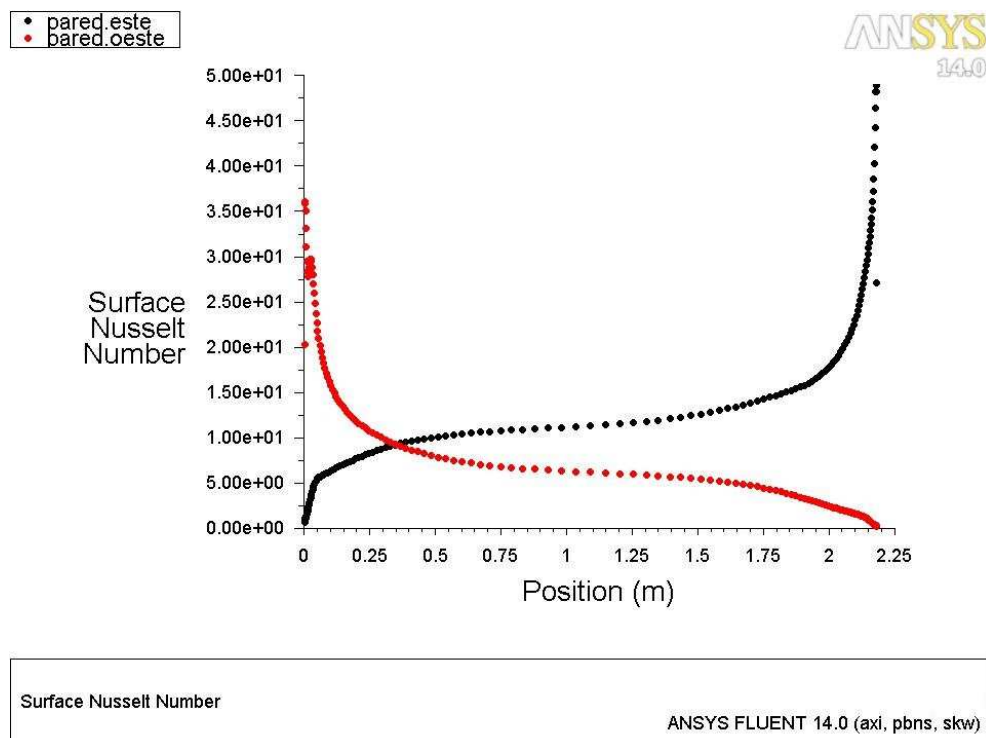


Figura 125. Distribución del número de Nusselt a lo largo las paredes isotérmicas para modelo standard $k-w$ y $Ra = 0.86 \times 10^6$. Pared.e coincide con la pared fría del cilindro interior y Pared.o con la pared caliente del cilindro exterior.

5.3.3. Cavity confinada entre cilindros coaxiales, $Ra = 1.43 \times 10^6$. Cilindro interior caliente.

Para la resolución de este caso se escogió el modelo estándar k-w, pues anteriormente ha demostrado que es el que mejores resultados obtiene.

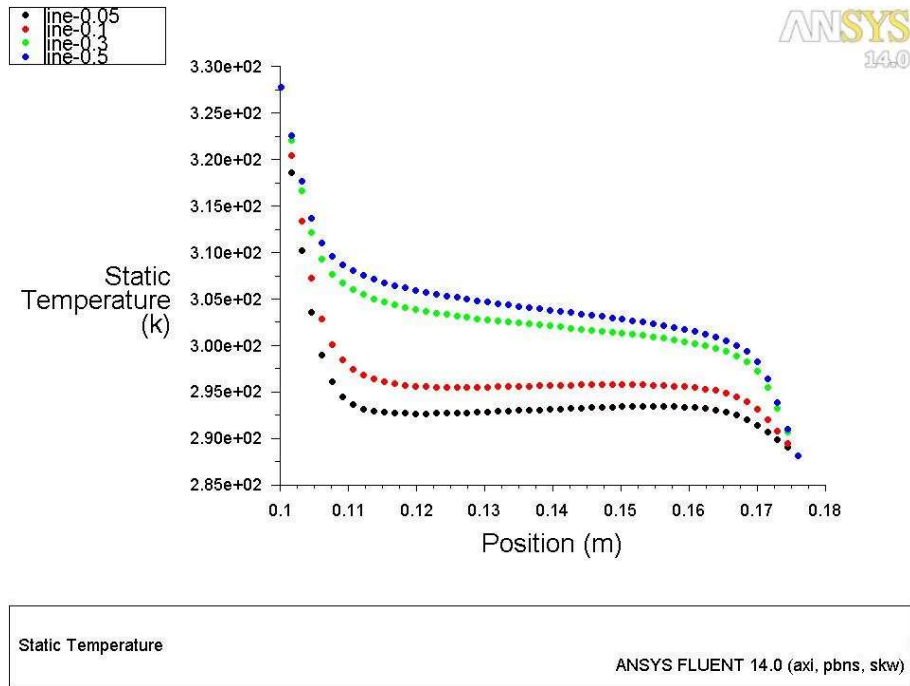


Figura 126. Distribución de temperaturas según modelo standard k-w a lo largo de las rectas de referencia $y/H = 0.05$, $y/H = 0.1$, $y/H = 0.3$, $y/H = 0.5$. $Ra = 1.43 \times 10^6$.

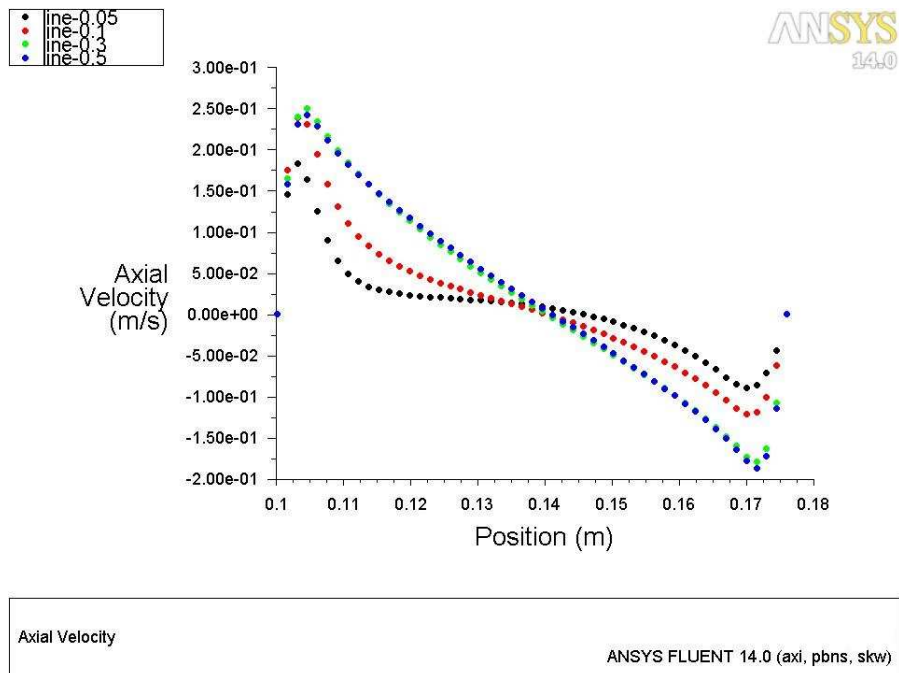


Figura 127. Distribución de velocidades axiales según modelo standard k-w a lo largo de las rectas de referencia $y/H = 0.05$, $y/H = 0.1$, $y/H = 0.3$, $y/H = 0.5$. $Ra = 1.43 \times 10^6$.

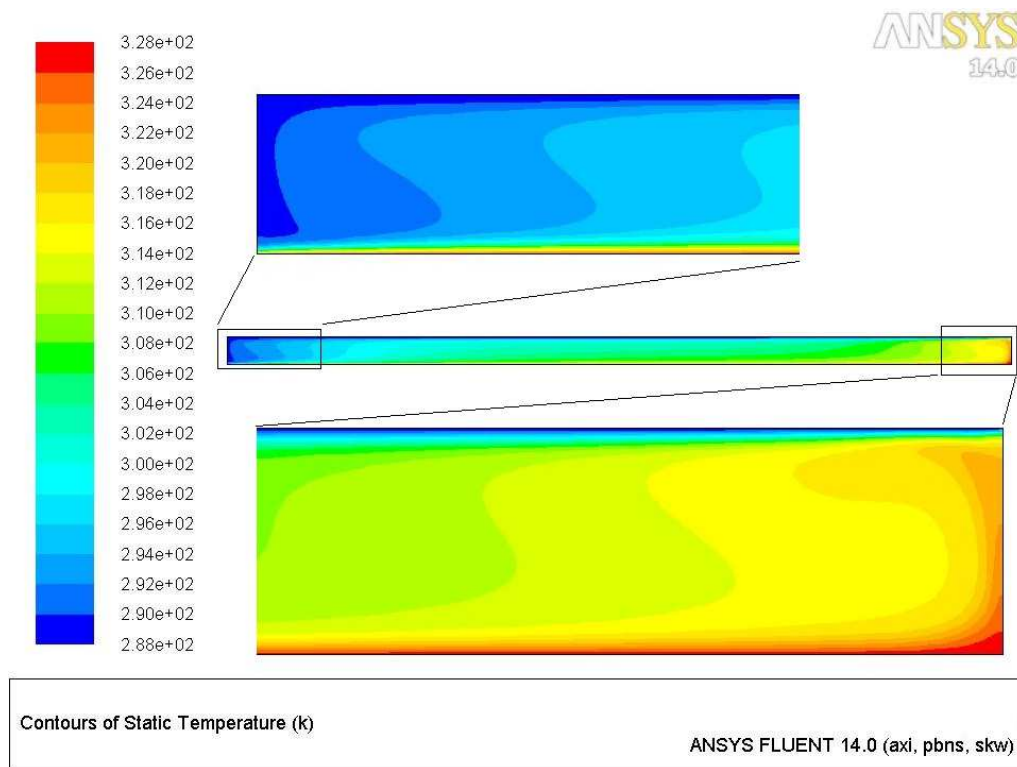


Figura 128. Distribución de temperaturas con el modelo standard k-w. $Ra = 1.43 \times 10^6$. Cilindro interior caliente.

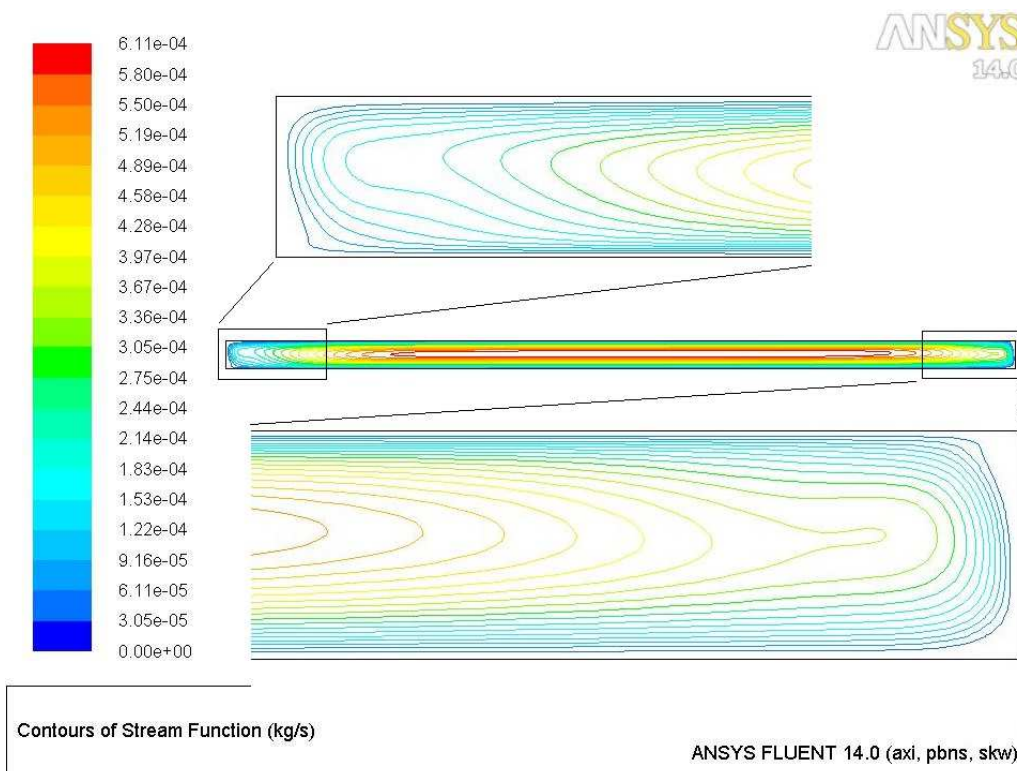


Figura 129. Líneas de corriente con el modelo standard k-w. $Ra = 1.43 \times 10^6$. Cilindro interior caliente.

Se observa como aumenta la oscilación de las velocidad. Esto es debido al mayor número de Rayleigh y, por tanto, mayor turbulencia presente en el flujo. Su valor máximo llega a triplicar la velocidad para el caso con menor Ra.

Lo mismo puede apreciarse en las líneas de corriente. Las líneas de corriente están mucho más pegadas, lo que indica un aumento de la velocidad. La topología de flujo que se crea es igual que para $Ra = 0.86 \times 10^6$.

Respecto a la distribución de temperaturas, se vuelve a notar que el flujo frío se desarrolla en mayores regiones que el caliente, presentando menores velocidades que el flujo caliente debido a la mayor superficie de contacto.

Analizando la distribución del Nusselt a lo largo de las paredes isotérmicas, se aprecia de nuevo la dependencia de la transferencia de calor con el área.

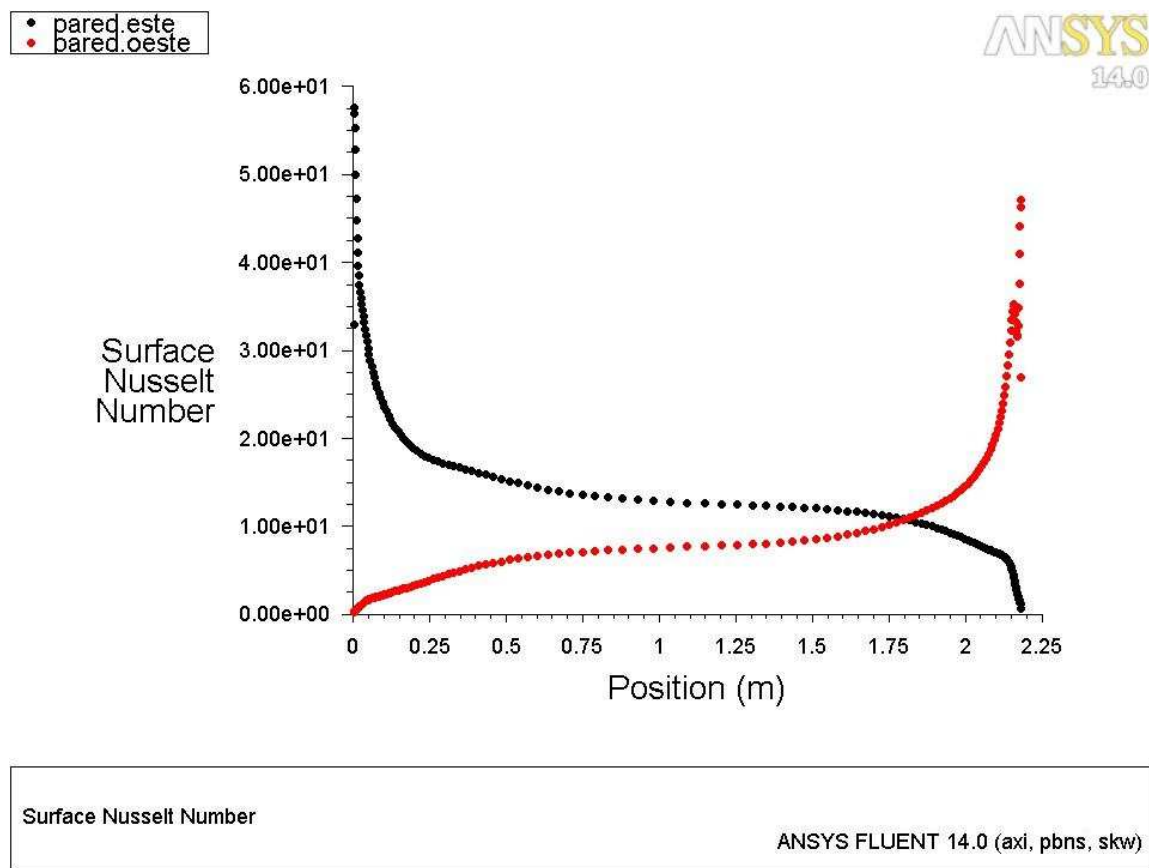


Figura 130. Distribución del número de Nusselt a lo largo las paredes isotérmicas para modelo standard $k-w$ y $Ra = 1.43 \times 10^6$. Pared.e coincide con la pared caliente del cilindro interior y Pared.o con la pared fría del cilindro exterior.

6. CONCLUSIONES

Una vez analizados todos los datos obtenidos, así como los procesos de resolución llevados a cabo, se puedan extraer una serie de conclusiones respecto a la simulación de la convección natural en régimen turbulento.

Lo primero, es que es un problema altamente dependiente de la geometría y las dimensiones del recinto donde el fenómeno se produzca. Así, se observa que, en general, para sistemas tridimensionales relativamente sencillos, la obtención de una solución estable se vuelve tediosa y compleja. Se requiere profundizar en las opciones que proporciona la herramienta de simulación e ir obteniendo una solución estable poco a poco.

La resolución directa del fenómeno en una cavidad cilíndrica se volvió casi imposible debido a la complejidad del flujo, altamente tridimensional. Es imprescindible partir de casos con un número relativamente bajo de Rayleigh (coincidentes con régimen laminar), para poder iniciar el flujo convectivo, obtener una primera solución del problema e ir aumentando su valor hasta el requerido, siendo, incluso a veces, insuficiente para poder resolver el problema. También se demostró que las dimensiones de la cavidad jugaban un papel muy importante, siendo necesario simular cavidad con dimensiones unitarias para que los cálculos sean asequibles.

De igual manera, el estudio de la sección media axilsimétrica del cilindro tampoco aportó soluciones fiables, siendo imposible en cualquier caso simular flujos altamente turbulentos.

Se comprueba que el fenómeno de convección natural turbulenta dentro de un cilindro es altamente dependiente con el tiempo. La necesidad de estudiar regímenes transitorios durante largos tiempos de flujo, así como la imposibilidad de alcanzar una solución estacionaria estable, determinaron que este caso fuese desechado dentro del objetivo de proveer de un problema relativamente asequible de simular.

Aun con esto, se puede determinar que el mejor modelo de dos ecuaciones a emplear es el modelo *standard k-w* en régimen transitorio, una vez iniciado el flujo bajo números de Rayleigh menores. Si se consigue obtener una malla adecuada y se restringen las dimensiones del dominio a valores unitarios, en un largo período de tiempo sería posible encontrar una solución bajo este modelo. No obstante, esto no asegura encontrar una solución estable estacionaria.

Con estos resultados, se decidió simular la cavidad rectangular altamente esbelta en la que experimentaron **Betts y Bokhari (2000)**. Las dimensiones de la cavidad permiten estudiar sin margen de error la sección media bidimensional de la misma, pues estos investigadores ya demostraron experimentalmente esta condición.

Los resultados satisfactorios de estas simulaciones permiten concluir que, para simular y estudiar casos tridimensionales de una forma asequible y sencilla, se deben disponer de condiciones de simetría o esbeltez para poder reducir el problema a un caso bidimensional.

Las simulaciones llevadas a cabo proporcionaron un flujo convectivo dentro de la cavidad rectangular coincidente con un rollo convectivo formado por dos subflujos, uno más caliente que asciende a lo largo de la pared caliente, y otro más frío que desciende pegado a la pared fría. Este rollo convectivo coincide con los resultados experimentales de anteriores investigadores.

Para la modelación de este problema, es necesario pequeños conocimientos de mallado, así como de configuración de modelos de turbulencia, para mejorar el modelo según se resuelven las ecuaciones del flujo y poder obtener resultados más precisos.

Se determinó que una malla suficientemente buena para arrojar resultados precisos es la formada por 50 x 100 celdas. Las dimensiones de la cavidad permiten que no haga falta refinar la malla cerca de las paredes, pues la distribución de estas celdas ya otorga suficientes puntos de resolución.

Bajo estas condiciones, el modelo de cuatro ecuaciones *Transitional SST* demostró proporcionar resultados suficientemente precisos en poco tiempo. No obstante, la mayor precisión de los modelos de dos ecuaciones determina que se elijan éstos como óptimos para encontrar la mejor solución.

El modelo *transitional SST* es recomendable para obtener una primera solución aproximada del campo medio del flujo.

Tanto los modelos *k-e* como los *k-w* demostraron resolver muy satisfactoriamente el campo de temperaturas, disminuyendo un pequeño porcentaje su precisión para calcular los perfiles de velocidad.

De estos modelos, el que mejor desempeño cumple en el modelo *k-w*, pues su precisión en el campo de velocidades es mayor. Incluso otorga buenos resultados en las regiones cercanas a la capa límite si necesidad de refinamientos de malla. Dentro de las dos opciones del modelo, se selecciona *Standard k-w* pues los resultados son muy similares y su peso computacional es menor.

Así pues, en este trabajo, se concluye que el modelo de turbulencia de dos ecuaciones que mejor resultados proporciona es el modelo *Standard k-w*. Empleando este modelo, basta con definir una malla cuadrática de 50 x 100 celdas para obtener soluciones precisas. Posteriormente, puede constituir un ejercicio interesante definir más celdas entre el campo medio y las regiones próximas a las paredes horizontales para refinar los perfiles obtenidos. No obstante, como ya se ha indicado, la malla seleccionada otorga buenos resultados en general.

Gracias a los resultados anteriores, se decidió volver a estudiar un depósito cilíndrico. En este caso, se modelaron dos cilindros concéntricos coaxiales, con el flujo de trabajo confinado en el hueco entre ellos. Al introducir un segundo cilindro más esbelto dentro del primero se consigue, por un lado, poder fijar el gradiente de temperaturas entre paredes verticales, y, por otro lado, proporcionar un camino al flujo para su desarrollo.

Las simulaciones llevadas a cabo comprendían dos valores del Rayleigh, así como gradientes de temperatura de sentidos contrarios, variando las paredes isotérmicas. El problema se reduce a un caso bidimensional axilsimétrico, pudiendo obtenerse una solución en poco tiempo y con cálculos no muy tediosos.

En este problema, el mallado demostró ser un paso crítico, necesitando proporcionar una malla con suficientes puntos de cálculo y refinamiento cerca de las paredes. Como mínimo, se requiere un mallado de 50 x 150 celdas y un factor Bias de 50 en las fronteras del dominio.

Finalmente, se obtuvieron resultados acordes a las tendencias demostradas en los apartados anteriores. Este caso constituye un buen problema para adquirir conocimientos de mallado y profundizar en el papel que ésta juega en la resolución. Sabiendo que los resultados han de ser análogos a los del caso bidimensional, puede servir como punto de partida para avanzar en las posibles opciones de mallado y centrar el estudio en obtener una malla adecuada.

Bajo este caso, se puede estudiar cualitativamente el efecto de la geometría en el flujo. Se observa claramente como el subflujo (más frío o más caliente) que discurre por la pared de mayor área de contacto, ve reducida drásticamente su velocidad debido a la distribución del flujo másico. El flujo pegado al cilindro de menor área presenta velocidades mayores y, por tanto, un gradiente de temperaturas mayor debido a la mezcla que se produce.

Independientemente de qué pared presente mayor o menor temperatura, el flujo pegado al cilindro interior siempre presentará mayores velocidades y distribución de temperaturas.

De igual modo, esto puede observarse en la distribución del número de Nusselt. El flujo desarrollado tangencialmente al cilindro interior presenta mayores coeficientes debido al menor área de intercambio de calor.

Los resultados de este último problema hicieron llegar a la conclusión de que es más sencillo y asequible estudiar el fenómeno de convección natural cuando se aplica un gradiente de temperaturas horizontal. Además, la inclusión de una pared interior facilita la formación del flujo y el desarrollo del mismo.

La topología obtenida en todos los casos simulados convergidos fue la misma. Bajo las condiciones simuladas, se forma un único rollo convectivo con el subflujo caliente ascendiendo a lo largo de la pared caliente y el subflujo frío descendiendo paralelo a la pared fría. El sentido del remolino lo determina el sentido del gradiente de temperaturas.

Como conclusión final, los resultados de este proyecto otorgan una idea de las distintas posibilidades a la hora de analizar flujos de convección natural en régimen turbulento. Si el objetivo es encontrar un problema sencillo de obtener, y con tiempos de resolución bajos, el experimento de Betts y Bokhari representa un ejemplo muy claro.

A partir de una primera solución convergida, se puede profundizar en regiones cercanas a la pared o en el mallado del entorno, por ejemplo, sin que sea necesario su estudio previo para obtener soluciones fiables.

Posteriormente, para avanzar en el estudio del fenómeno y proveer de un caso más complejo, simular la cavidad confinada entre los cilindros coaxiales es una buena idea. Este problema ya requiere mayores conocimientos, principalmente respecto a la modelación de la malla, ya que ésta necesita un tratamiento profundo.

Una vez obtenida la malla adecuada, el resto de configuraciones es análogo a los de la cavidad bidimensional, por lo que este problema se vuelve muy adecuado para estudiar la dependencia de la malla y la geometría con el fenómeno.

REFERENCIAS Y BIBLIOGRAFÍA

- [1] Ahlers, G.; Grossmann, S.; Lohse, D.: "Heat transfer and large-scale dynamics in turbulent Rayleigh-Bénard Convection", *Rev. Mod. Phys.*, 81, pp. 73-94 (2009)
- [2] Aziz, K.; Hellmunds, J.D.: "Numerical solutions of the three-dimensional equation of motion for laminar natural convection", *Phys. Of Fluids*, 10, pp. 314-324. (1967)
- [3] Bailon-Cuba, J.; Emran, M.; Schumacher, J.: "Aspect ratio dependence of heat transfer and large-scale flow in turbulent convection", *J. Fluids Mech.*, 655, pp 152-173 (2010)
- [4] Batchelor, G.: "Heat transfer for free convection across a closed cavity between vertical boundaries at different temperatures", *Quarterly of applied mathematics*, 12, pp. 209-233 (1954)
- [5] Bénard, M.: "Les tourbillons callulaires dans une nappe liquide transportant de la chaleur par convection en régime permanent", *Ann. Chim. Phys.*, 23, pp 62-144 (1901)
- [6] Betts y Bokhari: "Experiments on turbulent natural convection in an enclosed tall cavity". *I. J. of Heat and Fluid Flow*, 21, pp 675-683 (2000)
- [7] Boronska, K.; Tuckerman, L.: "Extreme multiplicity in cylindrical Rayleigh-Bénard Convection. Part 1. Time-dependence and oscillations." *Phys. Rev.*, 81 (2010)
- [8] Boronska, K.; Tuckerman, L.: "Extreme multiplicity in cylindrical Rayleigh-Bénard Convection. Part 2. Bifurcation diagram and symmetry classification", *Phys. Rev.*, 81 (2010)
- [9] Buell, J.; Catton, I.: "The effect of wall conduction on the stability of a fluid in a right circular cylinder heated from below", *J. Heat Transfer*, 105, pp 255-260 (1983)
- [10] Catton, I.: "Convection in a closed rectangular region: the onset of motion", *J. Heat Transfer*, 92, pp 186-188 (1970)
- [11] Catton, I.: "The effect of insulating vertical walls on the onset of motion in a fluid heated from below", *Int. J. Heat Mass Transfer*, 15, pp 665-672 (1972a)
- [12] Catton, I.: "Effect of wall conduction on the stability of a fluid in a rectangular region heated from below" *J. Heat Transfer*, pp 446-458 (1972b)
- [13] Cebecchi, T.; Bradshaw, P.: "Physical and computational aspects of convective heat transfer", Springer-Verlag, 1ªedición, 1984)
- [14] Charlson, G.; Sani, R.: "On thermoconvective instability in a bounded cylindrical fluid layer", *I. T: Heat Mass Transfer*, 13, pp 1479-1496 (1970)
- [15] Charlson, G.; Sani, R.: "On thermoconvective instability in a bounded cylindrical fluid layer", *I. T: Heat Mass Transfer*, 14, pp 2157-2160 (1971)
- [16] Cortés, M.; Fazio, P.; Rao, J.; Bustamante, W.; Vera, S.: "Modelación CFD de casos básicos de convección en ambientes cerrados", <http://dx.doi.org/10.4067/S0718-50732014000100002>
- [17] Crespo, Antonio: "Mecánica de Fluidos" (Thomson Paraninfo, 2006, 1ª edición)
- [18] Du Puits, R.; Resagk, C.; Thess, A.: "Mean velocity profile in confined turbulent convection", *Phys. Rev. Lett.*, 99 (2007a)
- [19] Du Puits, R.; Resagk, C.; Thess, A.: "Structure of thermal boundary layers in turbulent Rayleigh-Bénard convection", *J. Fluid Mech.*, 572, pp 231-254 (2007b)

- [20] Du Puits, R.; Resagk, C.; Thess, A.: "Structure of viscous boundary layers in turbulent Rayleigh-Bénard Convection". *Phys. Rev. Lett.*, 80 (2009)
- [21] Du Puits, R.; Resagk, C.; Thess, A.: "Thickness of the diffusive sublayer in turbulent convection. *Phys. Rev. E* 81", *Phys. Rev. Lett.*, 81 (2010)
- [22] Du Puits, R.; Resagk, C.; Li, C.: "Viscous Boundary layers in turbulent Rayleigh-Bénard Convection", *Journal of Physics: Conference Series* 318 (2011)
- [23] Du Puits, R.; Resagk, C.; Thess, A.: "Thermal boundary layers in turbulent Rayleigh-Bénard convection at aspect ratio between 1 and 9", *New J. Phys. Phys. Rev. Lett.*, 99 (2013)
- [24] Davis, S.: "Convection in a box: linear theory", *J. Fluid Mech.*, 30, pp 465-478 (1967)
- [25] Devan, A.: "Tackling Turbulent Flows in Engineering", Springer, 1 edición, (2011)
- [26] Gray, D.; Giorgini, A.: "The Validity of the Boussinesq Approximation for Liquids and Gasses", *Int. J. Heat Mass Transfer*, 19, pp. 545-551 (1976)
- [27] Heitz, W.; Westwater, J.: "Critical Rayleigh numbers for natural convection of water confined in square cells with L/D from 0.5 to 8". *J. Heat Transfer*. (936), pp 188-196 (1971)
- [28] Hernández, R., Frederick, R.: "Spatial and thermal features of three dimensional Rayleigh-Bénard convection", *Int. J. Heat Mass Transfer*, 37, pp 411-424 (1994)
- [29] Hof, B.; Lucas, P.; Mullin, T.: "flow state multiplicity in convection", *Phys. Fluids*, 11, pp 2815-2817 (1999)
- [30] Hsieh, K.; Lien, F.: "Numerical modeling of buoyancy-driven turbulent flows in enclosures", *I. J. of Heat and Fluid Flow*, 25, pp 659-670 (2004)
- [31] Incropera, F.; DeWitt, D.; Bergman, T.; Lavine A.: "Introduction to Heat Transfer" (John Wiley & Sons, 1990, 5ª edición)
- [32] Jeffreys, H.: "The stability of a layer of fluid heated from below", *Phil. Mag.*, 2, 833-844 (1926)
- [33] Kim, D.; Viskanta, R.: "Study of the effects of wall conductance on natural convection in differently oriented square cavities", *J. Fluid Mech.*, 144, pp 153-176 (1984)
- [34] Leong, S.: "Numerical study of Rayleigh-Bénard convection in a cylinder", *Numer. Heat Transfer*, 41, 673-683 (2002)
- [35] Manga, M.; Weeraratne, D.; Morris, S.: "Boundary-Layer Thickness and Instabilities in Bénard-Convection of a liquid with a temperature-dependent viscosity", *Phys. Fluids*, 13, pp 802-805 (2001)
- [36] Martynenko, O.; Khramtsov, P.: "Free-Convective Heat Transfer", 1ª edición, 2005
- [37] Moresi, L.; Solomatov, V.: "Numerical Investigation of 2D Convection with Extremely Large Viscosity Variations", *Phys. Fluids*, 7, pp 2154-2162 (1995)
- [38] Müller, G.; Neumann, G.; Weber, W.: "Natural convection in vertical Bridgman configurations", *J. Cryst. Growth*, 70, pp 78-93 (1984)
- [39] Neumann, G.: "Three-dimensional numerical simulation of buoyancy-driven convection in vertical cylinders heated from below", *J. Fluid Mech*, 214, pp 559-578 (1990)

- [40] Niemela, J.; Skrbek, L.; Sreenivasan, K.; Donnelley, R.: "Turbulent convection at very high Rayleigh numbers", *Nature*; 404, pp 837-840 (2000)
- [41] Ozoe, H.; Yamamoto, K.; Churchill, S.; Sayama, H.: "Three-dimensional, numerical analysis of laminar natural convection in a confined fluid heated from below." *J. Heat Transfer*, 98, pp 202-207 (1977).
- [42] Pallarés, J.; Cuesta, I.; Grau, F.; Giralt, F.: "Natural convection in a cubical cavity heated from below at low Rayleigh numbers", *I. J. Heat Mass Transfer*, 39, pp 3233-3247 (1996)
- [43] Pallarés, J.; Arroyo, M.; Grau, F.; Giralt, F.: "Experimental laminar Rayleigh-Bénard convection in a cubical cavity at moderate Rayleigh and Prandtl numbers", *J. Experiments in fluids*, 31, pp 208-218 (2001)
- [44] Pallarés, J.; Cuesta, I.; Grau, F.: "Laminar and turbulent Rayleigh-Bénard convection in a perfectly conducting cubical cavity", *I. J. Heat and Fluid Flow*, 23, pp 346-358 (2002)
- [45] Pope, Stephen: "Turbulent Flows" (Cambridge University Press, 2000, 1ª edición)
- [46] Rayleigh (Lord): "On convection currents in a horizontal layer of fluid when the higher temperature is on the under side", *Philos. Mag.*, 32, pp 529-546 (1916)
- [47] Rosenblat, S.: "Thermal convection in a vertical circular cylinder". *J. Fluid Mech.*, 122, pp 395-410 (1982)
- [48] Rüdiger, S.; Feudel, F.: "Pattern Formation in Rayleigh-Bénard convection in a cylindrical container", *phys. Rev.*, 62, pp 4927-4931 (2000)
- [49] Scheel, J.; Kim, E.; White, K.: "Thermal and viscous boundary layers in turbulent Rayleigh-Bénard convection", *J. Fluid Mech.*, 711, pp 281-305 (2012)
- [50] Solomatov, V.: "(1995). Scaling of Temperature- and Stress-Dependent Viscosity Convection", *Phys. Fluids*, 7, pp 266-274 (1995)
- [51] Stork, K.; Müller, U.: "Convection in boxes: experiments in vertical cylinders", *J. Fluid Mech.*, 54, pp 599-611 (1972)
- [52] Trompert, R.; Hansen, U.: "On the Rayleigh Number Dependence of Convection with a Strongly Temperature-Dependent Viscosity", *Phys. Fluids.*, 10, pp 351-360 (1998)
- [53] Valencia, L.: "Estudio numérico y experimental de flujo Rayleigh-Bénard en cavidades cubicas para régimen transitorio y turbulento", Tesis Doctora, Universitat Rovira i Virgili, Tarragona, 2005
- [54] Wang, B.; Ma, D.; Chen, C.; Sun, D.: "Linear stability of cylindrical Rayleigh-Bénard convection", *J. Fluid Mech.*, 711, pp. 27-39 (2012).
- [55] Wanschura, M.; Kuhlmann, H.; RATH, H.: "Three-dimensional instability of axisymmetric buoyant convection in cylinders heated from below", *J. Fluid Mech.*, 326, pp 399-415 (1996).

ANEXO I

APROXIMACIÓN DE BOUSSINESQ

OBTENCIÓN Y DISCUSIÓN

Los efectos por flotabilidad ocurren, en principio, en cualquier flujo de densidad variable bajo un campo gravitacional. Su importancia se incrementa con el gradiente de densidades y puede ser caracterizado por el valor del número de Richardson.

$$Ri = \frac{\Delta\rho}{\rho} \frac{g \cdot H}{u^2} \quad (A1.1)$$

Siendo $\Delta\rho$ la diferencia de densidades que ocurre sobre una longitud característica h (típicamente vertical) de un flujo con velocidad u .

A medida que el número de Richardson tiende a cero, así ocurre con la importancia de las fuerzas de flotabilidad.

Este número adimensional implica que los efectos por flotabilidad más significantes pueden tener lugar, o bien, cuando la relación $\Delta\rho/\rho$ es significativa, como en columnas de aire a pequeña escala; o bien si el término significativo es $g \cdot H/u^2$, como en los flujos geofísicos a gran escala.

Los flujos creados enteramente por fuerzas de flotabilidad son denominados como **convección natural o libre**, para distinguirlos de los **flujos convectivos forzados**, los cuales están impulsados, principalmente, por diferencias de presión impuestas a las que se pueden sumar efectos de flotabilidad.

Dentro de la convección libre, si los cambios en la densidad son pequeños, podemos suponer que los efectos de flotabilidad son principalmente dependientes de la acción del campo gravitatorio, y aplicar la aproximación de Boussinesq.

Esta aproximación desprecia los efectos de compresibilidad en flujos compresibles y supone constantes las propiedades del fluido a pesar de las variaciones de temperatura (si éstas también son pequeñas), salvo para la densidad en la dirección vertical, donde existirá un gradiente de densidades representado únicamente por el término de las fuerzas másicas de la ecuación del transporte de Navier-Stokes. Es decir, si esta aproximación es aplicable, se puede tomar la densidad de referencia ρ_0 como valor para la densidad en todos los términos, excepto en el que representa el efecto de las fuerzas de flotabilidad, donde se empleará una modelización dependientemente lineal con la temperatura.

El desarrollo en series de Taylor de la ecuación de estado del fluido, $\rho = \rho(p, T)$, proporciona la siguiente aproximación.

$$\frac{\rho - \rho_0}{\rho_0} = \frac{1}{\rho_0} \left[\left. \frac{\partial \rho}{\partial T} \right|_p (T - T_0) + \left. \frac{\partial \rho}{\partial p} \right|_T (p - p_0) \right] \quad (A1.2)$$

Con esta primera aproximación es más que suficiente en la mayoría de los casos, pues los términos cuadráticos son ya suficientemente bajos como para despreciarlos.

Siendo β el coeficiente de expansión térmica del fluido, $\beta = -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p$;

y κ el coeficiente de compresibilidad, $\kappa = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_T$;

Podemos reescribir la aproximación,

$$\frac{\rho - \rho_0}{\rho_0} = -\beta(T - T_0) + \kappa(p - p_0) \quad (A1.3)$$

Se puede observar que, para que las variaciones de densidad sean pequeñas, también han de serlo las de presión y temperatura frente a unos valores de referencia p_0 y T_0 característicos del problema.

Cuando en el movimiento del fluido juegan un papel importante las variaciones de temperatura, como en el caso de la convección RB, puede demostrarse que la influencia de las variaciones de presión sobre las variaciones de densidad es despreciable.

Para alcanzar tal conclusión, basta con analizar la relación entre ambos términos. En la mayoría de los casos reales para diferencias tangibles de temperatura y fluidos típicos, el segundo término es tan bajo que los cambios en la presión del fluido no ejercen una influencia substancial en el cambio de densidad.

Por tanto, la ecuación de estado (A1.3) puede aproximarse a:

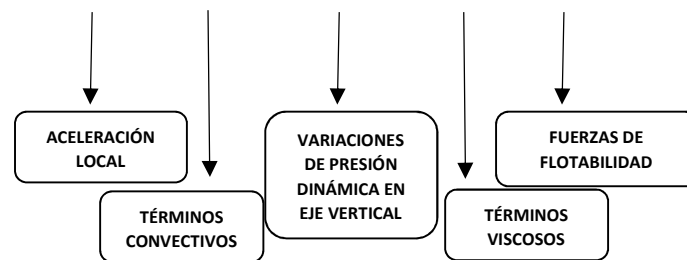
$$\frac{\rho - \rho_0}{\rho_0} = -\beta(T - T_0) \quad (A1.4)$$

Donde el coeficiente de expansión térmica para un gas ideal se expresa como $\beta = \frac{1}{T}$.

Sustituyendo el término de las fuerzas másicas por esta aproximación, se obtiene la ecuación de cantidad de movimiento respecto al eje vertical z . En el resto de direcciones, las fuerzas de flotabilidad no actúan y no hay fuerzas másicas considerables.

$$\rho \frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + \rho \nabla(\vec{U}\vec{U}) = -\nabla \vec{P} + \mu \nabla^2 \vec{U} + \rho \cdot \vec{g} \quad (A1.5)$$

$$\frac{\partial U_z}{\partial t} + \vec{U} \nabla_z \vec{U} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial P}{\partial z} + \nu \nabla_z^2 \vec{U} + g\beta(T - T_0) \quad (A1.6)$$



Para verificar que la aproximación tomada es correcta, se pueden tomar órdenes de magnitud para las variaciones de presión dinámica y comparar el resultado con las variaciones de temperatura.

Se puede estimar un orden de magnitud para la presión hidrodinámica de la ecuación de conservación de cantidad de movimiento para cualquier otra dirección que no sea z (A1.4). Para estas componentes, la única variación de presión a tener en cuenta será la dinámica, generada por el movimiento convectivo del fluido.

$$\theta(\nabla \vec{P}) \sim \theta(\rho \nabla(\vec{U}\vec{U})) \quad (A1.7)$$

$$p - p_0 \sim \rho U_c^2 \quad (A1.8)$$

Al tratarse de convección natural, el movimiento del fluido está provocado por las fuerzas de flotabilidad, es decir, los términos convectivos han de ser proporcionales al efecto de estas fuerzas, dominantes sobre la conducción entre regiones del fluido. Con esta información, puede obtenerse una estimación de la velocidad característica del problema.

$$\theta(\vec{U} \nabla_z \vec{U}) \sim \theta(g\beta(T - T_0)) \quad (A1.9)$$

$$\frac{U_0^2}{h} \sim g\beta(T - T_0) \quad (A1.10)$$

$$U_c \sim \sqrt{h \cdot g \cdot \beta \cdot (T - T_0)} \quad (A1.11)$$

Con esto, la estimación para las variaciones de presión debidas al movimiento (A1.8) puede expresarse de la siguiente forma.

$$p - p_0 \sim \rho_0 \cdot h \cdot g \cdot \beta \cdot (T - T_0) \quad (A1.12)$$

La relación entre los términos de compresibilidad y difusividad térmica de la aproximación de Boussinesq en series de Taylor (A1.3) será:

$$\frac{\theta(\kappa(p - p_0))}{\theta(\beta(T - T_0))} \sim \frac{\kappa \cdot \rho_0 \cdot h \cdot g \cdot \beta(T - T_0)}{\beta(T - T_0)} \sim \kappa \cdot \rho_0 \cdot h \cdot g \quad (A1.13)$$

Para que los efectos de compresibilidad sean equiparables a los efectos de la difusividad térmica, ambos órdenes de magnitud deben ser proporcionales. Esto es, en el caso crítico de ambos efectos con el mismo orden de magnitud, la relación será igual a uno:

$$\frac{\theta(\kappa(p - p_0))}{\theta(\beta(T - T_0))} \sim \kappa \cdot \rho_0 \cdot h \cdot g \sim 1 \quad (A1.14)$$

Tomando aire atmosférico en condiciones normales, temperatura media de 30°C, se obtiene el valor crítico de la altura h a partir del cual las variaciones de presión son relevantes.

$$\rho_0 \sim 1.12 \text{ kg/m}^3; \quad \kappa \sim 10^{-5} \text{ m}^2/\text{N}; \quad g \sim 10 \text{ m/s}^2$$

$$h \sim 1/(\kappa \cdot \rho_0 \cdot g) \sim 1/(10^{-5} \cdot 1.12 \cdot 10) \sim 10^4 \text{ m} \quad (A1.15)$$

Es decir, a partir de los 10 km, los efectos del gradiente de presiones empiezan a ser significantes, y es por ello que este término es relevante en los procesos geofísicos de convección libre.

Por debajo de este valor de h , las fuerzas de flotabilidad causadas por diferencia de temperaturas son las dominantes pudiendo despreciar las variaciones de presión y verificando, por tanto, la aproximación obtenida en (A1.4) como correcta.

$$\frac{\theta(\kappa(p - p_0))}{\theta(\beta(T - T_0))} \sim \kappa \cdot \rho_0 \cdot h \cdot g \sim 10^{-5} \cdot 1 \cdot 10 \cdot 10 \sim 10^{-3} \quad (A1.16)$$

$$\frac{\theta(\kappa(p - p_0))}{\theta(\beta(T - T_0))} \ll 1 \quad (A1.17)$$

$$\theta(\kappa(p - p_0)) \ll \theta(\beta(T - T_0)) \quad (A1.18)$$

Para finalizar, se comprueba hasta que variación de temperaturas es esta aproximación y su modelización en la ecuación de cantidad de movimiento aún aplicable.

Considerando el aire un gas perfecto a temperatura media igual a 30°C, y sabiendo que, según los estudios de **Gray y Giorgini** (1976) [26], la aproximación de Boussinesq puede aplicarse siempre y cuando las variaciones de la temperatura no provoquen una variación de la densidad mayor del 10% (ni de ninguna otra propiedad del problema), se obtiene el máximo gradiente de temperaturas en el que esta aproximación es aún válida para este estudio.

$$\frac{\Delta \rho}{\rho_0} = -\frac{1}{T_0} \Delta T \quad (A1.19)$$

$$\Delta T \sim \frac{T_0 \cdot \Delta \rho}{\rho_0} \sim \frac{303 \cdot 0.1}{1.12} \sim 27 \text{ K} \quad (A1.20)$$

El uso de la aproximación de Boussinesq en aire estará justificado para variaciones de temperatura que no superen típicamente los 30°C. Por encima de esta diferencia, las variaciones de densidad empiezan a ser demasiado significantes como para despreciarlas en el resto de términos de las ecuaciones de Navier-Stokes.

